II — EXEMPLES D'ANNEAUX PRINCIPAUX NON EUCLIDIENS

Exercice 1

Soit $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{43}}{2}\right]$.

- Vérifier que A est intègre et en utilisant $N = |\cdot|^2$, montrer que $A^* = \{\pm 1\}$.
- Supposons par l'absurde que A est euclidien avec un stathme $\nu : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Soit $x \in A$ non inversible avec $\nu(x)$ minimal. Montrer que $A^* \cup \{0\} \rightarrow A/(x)$ est surjective.
- Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[X]/(P) \simeq A$.
- Montrer que les quotients $A/(2)$ et $A/(3)$ sont des corps et déterminer leurs cardinaux. *Indication : utiliser la technique du « double quotient ».*
- En faisant la division euclidienne de 2 par x , montrer que $x = \pm 2$ ou $x = \pm 3$ et aboutir à une contradiction.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\exists a \in A, N(z - a) < 1$$

ou

$$\exists a \in A, N(2z - a) < 1$$

ou

$$\exists a \in A, N(3z - a) < 1.$$

Indications. Supposons $z = x + iy$ avec $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{43}}{4}$. Traiter séparément les cas où $0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}$, où $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{43}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ et où $\frac{\sqrt{43}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} < y \leq \frac{\sqrt{43}}{4}$.

- Montrer que si $z \notin A$, il existe $p, q \in A$ tels que $0 < N(pz - q) < 1$.
- Soit $I \leq A$ un idéal non nul. Soit $0 \neq x \in I$ tel que $N(x)$ est minimal. En utilisant la question précédente, montrer que $I = (x)$.

Exercice 2 Un autre exemple

Soit $A = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$.

- Montrer que le polynôme $X^2 + Y^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'anneau A est intègre.
- Montrer que $A = \mathbb{R}[y] \oplus \mathbb{R}[y]x$ où $x = X \bmod (X^2 + Y^2 + 1)$, $y = Y \bmod (X^2 + Y^2 + 1)$.
- Montrer que l'application $N : A \rightarrow \mathbb{R}[Y]$, $a(y) + xb(y) \mapsto a(Y) - b(Y)(1 - Y^2)$ est bien définie et multiplicative. En déduire que $A^* = \mathbb{R}^*$.

- d) Soit $0 \neq f \in A$, montrer que $\dim A/(f) < \infty$.
- e) Supposons par l'absurde que A est euclidien avec un stathme $\nu : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Soit $0 \neq f \in A$ irréductible avec $\nu(f)$ minimal. Montrer que $A^* \cup \{0\} \rightarrow A/(f)$ est surjectif et trouver une contradiction.
- f) Soit $0 \neq I \leq A$ un idéal. On suppose que $\dim A/I = 2d$ est pair. En considérant $1, Y, X, Y^2, YX, \dots, Y^d, Y^{d-1}X$ trouver un élément $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que $f\bar{f} \in I^\dagger$ et $\deg f\bar{f} \leq 2d$. Montrer que $(f\bar{f}) = I$. *Indication. En utilisant la suite exacte*

$$0 \longrightarrow A/(f) \xrightarrow{\cdot\bar{f}} A/(f\bar{f}) \longrightarrow A/(\bar{f}) \longrightarrow 0$$

montrer que $\dim A/(f) = \deg f\bar{f} = 2 \deg f$.

- g) Soit $m \leq A$ un idéal maximal. Soit P tel que $m \cap \mathbb{R}[X] = P\mathbb{R}[X]$. Dédurre de l'inclusion

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[X]/(P) \hookrightarrow A/m$$

que P est de degré pair et en déduire que m est principal.

- h) Soit $0 \neq I \leq A$ un idéal. Justifier l'existence d'un idéal maximal m tel que $I \leq m$.
- i) Soit $(I : m) := \{x \in A : xm \subseteq I\}$. Montrer que c'est un idéal et que $m.(I : m) = I$. En déduire que tout idéal est principal.

---

†. On pose $\bar{f} = f(-X, Y)$.