V — SUR LES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

Exercice 1 Discriminant

Soit $P = a_0X^n + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

On suppose que $P = a_0(X - x_1)\dots(X - x_n)$.

On pose

$$\Delta_P = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = a_0^{2n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (x_i - x_j).$$

- Montrer que $\Delta_P \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n]$.
- Calculer Δ_P si P est de degré 2.
- Si P est de degré 3, montrer que

$$\Delta_P = a_1^2 a_2^2 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2 + 18a_0 a_1 a_2 a_3.$$

Indications. Montrer que $\Delta = a\sigma_1^6 + b\sigma_1^4\sigma_2 + c\sigma_1^3\sigma_3 + d\sigma_1^2 + e\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + f\sigma_2^3 + g\sigma_3^2$; puis en considérant le « degré en x_1 » montrer que $a = b = 0$ et trouver d, f . Puis traiter le cas où $\sigma_2 = 0$, etc

- Montrer que $\Delta_P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n P'(x_i)$ si P est unitaire.
- Soient P, Q deux polynômes unitaires de racines respectives : $x_1, \dots, x_m$ et $y_1, \dots, y_n$. Montrer que

$$\prod_{j=1}^n P(y_j) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^m Q(x_i)$$

- Calculer le discriminant de $X^n - 1$.

Exercice 2 Sommes de Newton.

On pose pour tout k : $S_k = X_1^k + \dots + X_n^k$.

- Exprimer $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ à l'aide des polynômes symétriques élémentaires

σ_i .

Indication. Remplacer T par $-X_i$, $i = 1, 2, 3$ dans l'identité

$$(T + X_1)\dots(T + X_n) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \dots + \sigma_n.$$

- Montrer que :

$$\forall r \geq n, S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} S_1 + (-1)^n \sigma_n S_{r-n} = 0$$

(où on pose $S_0 = n$) et que

$$\forall r < n, S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} S_1 + (-1)^r r \sigma_r = 0.$$

Indication. Commencer par le cas où $r = n$ puis $r \geq n$. Pour le cas où $r < n$, considérer le polynôme $F = S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} \sigma_{r-1} S_1 + (-1)^r \sigma_r$ puis $F(X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \dots$

Ce sont les formules de Girard-Newton

c) **Formules de Waring.**

On pose $S(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i T^i \in \mathbb{Z}[T, X_1, \dots, X_n]$.

En calculant $\log(1 + S)$, montrer que

$$\frac{\sum_{r=1}^{\infty} S_r T^r}{r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} S^k .$$

d) En déduire que :

$$\frac{S_r}{r} = (-1)^r \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = r}} (-1)^{k_1 + \dots + k_n} \frac{(k_1 + \dots + k_n - 1)!}{k_1! \dots k_n!} \sigma_1^{k_1} \dots \sigma_n^{k_n} .$$

pour tout $r \geq 1$.