

VI — SUR LE RÉSULTANT

Exercice.

Soient $f = f_p X^p + \dots + f_0$, $g = g_q X^q + \dots + g_0 \in \mathbb{C}[X]$.

- a) On suppose que $f = f_p(X - x_1)\dots(X - x_p)$, $g = g_q(X - y_1)\dots(X - y_q) \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$R_{p,q}(f, g) = f_p^q g_q^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (x_i - y_j).$$

Montrer que $R_{p,q}(f, g) \in \mathbb{Z}[f_0, \dots, f_p, g_0, \dots, g_q]$.

b) Soit $R = \text{Rés}_{p,q}(f, g) := \begin{vmatrix} f_p & & g_q & & \\ & f_p & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ & \vdots & & \ddots & \\ f_0 & & \vdots & & \\ & & & & g_0 \end{vmatrix}$. Montrer qu'il existe

$A \in \mathbb{C}[X]_{<q}$, $B \in \mathbb{C}[X]_{<p}$ tels que

$$Af + Bg = R.$$

Indication. On utilisera la règle de Cramer : si $\forall 1 \leq j \leq n$, $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = y_j$, alors $\forall 1 \leq k \leq n$, $\det A \cdot x_k = \det A'$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et A' la matrice obtenue en remplaçant la k -ième ligne de A par la ligne $(y_1, \dots, y_n)$.

- c) En déduire que $\text{Rés}_{p,q}(f, g) = 0 \Leftrightarrow f, g$ ont un facteur commun ou $f_p = g_q = 0$.
d) Soit $F \in A[X, Y]$ où A est un anneau (commutatif unitaire). Montrer que

$$F(X, X) = 0 \text{ dans } A[X] \Leftrightarrow X - Y | F \text{ dans } A[X, Y].$$

- e) Montrer que

$$\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (X_i - Y_j) = \begin{vmatrix} 1 & & 1 & & \\ -\sigma_1(X) & & \ddots & & -\sigma_1(Y) & & \ddots \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ (-1)^p \sigma_p(X) & & & & (-1)^q \sigma_q(Y) & & \end{vmatrix}$$

dans l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q]^\dagger$.

Indication. Vérifier que pour tous i, j , $X_i - Y_j$ divise le polynôme de droite
...

- f) En déduire $\text{Rés}_{p,q}(f, g) = R_{p,q}(f, g)$.
- g) Soient α, β algébriques sur $\mathbb{Q}$ annulés par respectivement $0 \neq f, g \in \mathbb{Q}[X]$. On suppose que $\deg f = p$, $\deg g = q$. On note $R(X) = \text{Rés}_{p,q}(f(Y - X), g(Y)) \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $R \neq 0$ et que $R(\alpha + \beta) = 0$.

Application. Trouver par cette méthode un polynôme rationnel annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$\dagger$. On note $\forall 1 \leq k \leq p, \sigma_k(X) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} X_{i_1} \dots X_{i_k}, \forall 1 \leq l \leq q, \sigma_l(Y) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq q} Y_{j_1} \dots Y_{j_l}$.