

Correction de l'examen du 4 mars 2026

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés

1. Pour un ordinal α on note

$$\text{Lim}(\alpha) = \{\beta < \alpha : \beta \text{ est un ordinal limite}\}.$$

Si A est un ensemble bien ordonné, on dénote par $\text{ot}(A)$ le *type d'ordre* de A , i.e., l'unique ordinal qui est isomorphe à A .

- (a) Quel est le type d'ordre de l'ensemble $\text{Lim}(\omega^2)$?

Solution. On a que $\text{Lim}(\omega^2) = \{\omega \cdot n : n < \omega\}$ et on voit que son type d'ordre est ω . □

- (b) Quel est le type d'ordre de $\text{Lim}(\omega^n)$ pour $2 \leq n < \omega$?

Solution. Si α est un ordinal limite avec $\text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) \geq \omega$, en utilisant le fait que $1 + \beta = \beta$ pour tout $\beta \geq \omega$, on a

$$\text{ot}(\text{Lim}(\alpha) \cdot \omega) = \text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) + 1 + \text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) + 1 + \cdots = \text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) \cdot \omega.$$

Donc

$$\text{ot}(\text{Lim}(\omega^{n+1})) = \text{ot}(\text{Lim}(\omega^n \cdot \omega)) = \text{ot}(\text{Lim}(\omega^n)) \cdot \omega$$

et on conclut par récurrence que $\text{ot}(\text{Lim}(\omega^n)) = \omega^{n-1}$. □

- (c) Quel est le plus petit ordinal $\alpha > 0$ tel que $\text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) = \alpha$?

Solution. D'une part, $\text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) \leq \alpha$ pour tout ordinal α . Par (b),

$$\text{ot}(\text{Lim}(\omega^\omega)) \geq \text{ot}(\text{Lim}(\omega^n)) = \omega^{n-1}$$

pour tout n et donc $\text{ot}(\text{Lim}(\omega^\omega)) = \omega^\omega$.

D'autre part, si $\alpha < \omega^\omega$, alors il existe n tel que $\omega^n < \alpha \leq \omega^{n+1}$ et donc $\text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) \leq \omega^n < \alpha$. On en déduit que l'ordinal recherché est ω^ω . □

2. (a) Soit λ un cardinal infini et soit $f: \lambda \rightarrow \lambda$ une fonction injective. Montrer que $\sup(\text{im } f) = \lambda$.

Solution. Soit $\alpha = \sup(\text{im } f)$. Alors $\text{im } f \subseteq \alpha + 1$ et comme f est injective et α est infini, ceci implique que $|\alpha| = |\alpha + 1| \geq \lambda$. D'autre part, $\alpha \leq \lambda$ et λ est un cardinal, d'où on conclut que $\alpha = \lambda$. □

- (b) Soient λ un cardinal infini, $(\kappa_i)_{i < \lambda}$ une suite croissante de cardinaux non nuls et $\kappa = \sup_{i < \lambda} \kappa_i$. Montrer que $\prod_{i < \lambda} \kappa_i = \kappa^\lambda$. (*Indication* : On pourra utiliser une bijection $\lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$.)

Solution. L'inégalité $\leq$ étant claire, démontrons l'autre. Soit $f: \lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$ une bijection. Par (a), pour tout $j < \lambda$, $\sup_i f(j, i) = \lambda$. Comme la suite $(\kappa_i)_i$ est croissante, on a que pour tout j , $\sup_i \kappa_{f(j, i)} = \kappa$. Maintenant :

$$\prod_{i < \lambda} \kappa_i = \prod_{i, j} \kappa_{f(i, j)} = \prod_j \left(\prod_i \kappa_{f(j, i)} \right) \geq \prod_j \kappa = \kappa^\lambda. \quad \square$$

3. Dans cet exercice on propose de démontrer que l'énoncé

(*) Tout ensemble non vide admet une structure de groupe.

implique l'axiome du choix dans ZF. (L'implication réciproque est vraie aussi.)

Soit X un ensemble et soit α un ordinal qui ne s'injecte pas dans X . Soit $\cdot$ une loi de groupe sur $X \cup \alpha$.

(a) Montrer que pour tout $z \in X$, il existe $\beta \in \alpha$ tel que $z \cdot \beta \in \alpha$.

Solution. Supposons pour contradiction qu'il existe $z \in X$ tel que pour tout $\beta \in \alpha$, $z \cdot \beta \in X$. Alors l'application $\alpha \rightarrow X, \beta \mapsto z \cdot \beta$ est une injection de α dans X ce qui contredit le choix de α . $\square$

(b) En déduire qu'il existe une injection de X dans $\alpha \times \alpha$ et conclure.

Solution. Soit $g: X \rightarrow \alpha$ défini par $g(z) = \min\{\beta \in \alpha : z \cdot \beta \in \alpha\}$. Alors $z = g(z) \cdot (z \cdot g(z))^{-1}$ et il s'en suit que l'application $f: X \rightarrow \alpha \times \alpha$ définie par $f(z) = (g(z), z \cdot g(z))$ est injective. Ceci donne une injection de X dans l'ordinal $\alpha \cdot \alpha$ ce qui implique que X peut être bien ordonné. $\square$

4. On définit les cardinaux $\beth_\alpha$ par induction :

$$\begin{aligned}\beth_0 &= \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\gamma &= \sup_{\beta < \gamma} \beth_\beta \quad \text{pour } \gamma \text{ limite.}\end{aligned}$$

On rappelle qu'un cardinal κ est dit *fortement limite* si $2^\lambda < \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$.

(a) Montrer qu'un cardinal non dénombrable κ est fortement limite si et seulement s'il existe un ordinal limite α tel que $\kappa = \beth_\alpha$.

Solution. Si α est limite et $\lambda < \beth_\alpha$, alors il existe $\beta < \alpha$ tel que $\lambda < \beth_\beta$. Alors $2^\lambda \leq 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} < \beth_\alpha$.

Pour l'autre sens, remarquons d'abord que par induction, il suit facilement que $\beth_\beta \geq \beta$ pour tout β . Soit maintenant $\alpha = \sup\{\beta : \beth_\beta \leq \kappa\}$. Par la définition de $\beth_\gamma$ pour γ limite, on a que $\beth_\alpha \leq \kappa$. Si $\beth_\alpha < \kappa$, alors comme κ est fortement limite, $\beth_{\alpha+1} < \kappa$, ce qui contredit la définition de α . Donc $\beth_\alpha = \kappa$. $\square$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$.

Solution. Définissons la suite $(\gamma_n)_{n < \omega}$ comme suit : $\gamma_0 = \aleph_0$, $\gamma_{2n+1} = \beth_{\gamma_{2n}}$, $\gamma_{2n+2} = \aleph_{\gamma_{2n+1}}$ et soit $\alpha = \sup_n \gamma_n$. Alors la suite $(\gamma_n)_n$ est croissante et :

$$\aleph_\alpha = \sup_n \aleph_{\gamma_{2n+1}} = \sup_n \gamma_{2n+2} = \sup_n \gamma_{2n+1} = \sup_n \beth_{\gamma_{2n}} = \beth_\alpha. \quad \square$$