

Examen de théorie des ensembles (4 mars 2026)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés

1. Pour un ordinal α on note

$$\text{Lim}(\alpha) = \{\beta < \alpha : \beta \text{ est un ordinal limite}\}.$$

Si A est un ensemble bien ordonné, on dénote par $\text{ot}(A)$ le *type d'ordre* de A , i.e., l'unique ordinal qui est isomorphe à A .

- (a) Quel est le type d'ordre de l'ensemble $\text{Lim}(\omega^2)$?
 - (b) Quel est le type d'ordre de $\text{Lim}(\omega^n)$ pour $2 \leq n < \omega$?
 - (c) Quel est le plus petit ordinal $\alpha > 0$ tel que $\text{ot}(\text{Lim}(\alpha)) = \alpha$?
2. (a) Soit λ un cardinal infini et soit $f: \lambda \rightarrow \lambda$ une fonction injective. Montrer que $\sup(\text{im } f) = \lambda$.
(b) Soient λ un cardinal infini, $(\kappa_i)_{i < \lambda}$ une suite croissante de cardinaux non nuls et $\kappa = \sup_{i < \lambda} \kappa_i$. Montrer que $\prod_{i < \lambda} \kappa_i = \kappa^\lambda$. (*Indication* : On pourra utiliser une bijection $\lambda \times \lambda \rightarrow \lambda$.)
3. Dans cet exercice on propose de démontrer que l'énoncé
(*) Tout ensemble non vide admet une structure de groupe.
implique l'axiome du choix dans ZF. (L'implication réciproque est vraie aussi.)
Soit X un ensemble et soit α un ordinal qui ne s'injecte pas dans X . Soit $\cdot$ une loi de groupe sur $X \cup \alpha$.
(a) Montrer que pour tout $z \in X$, il existe $\beta \in \alpha$ tel que $z \cdot \beta \in \alpha$.
(b) En déduire qu'il existe une injection de X dans $\alpha \times \alpha$ et conclure.
4. On définit les cardinaux $\beth_\alpha$ par induction :

$$\begin{aligned}\beth_0 &= \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\gamma &= \sup_{\beta < \gamma} \beth_\beta \quad \text{pour } \gamma \text{ limite.}\end{aligned}$$

On rappelle qu'un cardinal κ est dit *fortement limite* si $2^\lambda < \kappa$ pour tout $\lambda < \kappa$.

- (a) Montrer qu'un cardinal non dénombrable κ est fortement limite si et seulement s'il existe un ordinal limite α tel que $\kappa = \beth_\alpha$.
- (b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$.