

## Feuille 1

### Exercice 1 (Axiomes.)

1. Donner un exemple d'un univers dans lequel l'axiome d'extensionnalité n'est pas vrai.
2. Montrer que l'axiome de l'ensemble vide est équivalent à l'existence d'un ensemble (autrement dit au fait que  $V \neq \emptyset$ ).

### Exercice 2 (Ensembles.)

Soit  $x$  et  $y$  deux ensembles.

1. Montrer que  $x \cup y$  et  $x \cap y$  sont des ensembles.
2. Montrer que  $S(x)$  est bien un ensemble.

### Exercice 3 (Ensembles.)

Soient  $X$  et  $Y$  des ensembles.

1. Montrer que la paire  $(X, Y)$  est un ensemble.
2. Montrer que le produit cartésien  $X \times Y$  est un ensemble.

### Exercice 4 (Ensembles.)

Soit  $X$  un ensemble et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Vérifier que chaque classe d'équivalence est un ensemble ainsi que le quotient  $X/R$ .

### Exercice 5 (Axiome de fondation.)

On rappelle que l'axiome de fondation est l'énoncé suivant : pour tout ensemble non vide  $x$ , il existe un ensemble  $y \in x$  tel que  $y \cap x = \emptyset$ . Vérifier que cet axiome interdit l'existence d'ensembles  $x$  tels que  $x \in x$ , ou l'existence de suites  $(x_n)_{n < \omega}$  telles que  $x_{n+1} \in x_n$  pour tout  $n$ .

### Exercice 6 (Ensembles ordonnés : ordres totaux, bons ordres, ordres denses.)

1. Montrer que toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné est bien ordonnée par rapport à la même relation d'ordre.
2. Montrer que le produit cartésien de deux ensembles totalement ordonnés, muni de l'ordre lexicographique défini à partir des deux ordres, est totalement ordonné. Que peut-on dire si les deux ordres sont bons ?
3. On munit  $\mathbb{N}$  de son bon ordre usuel, noté  $<$ . Montrer que si  $A \subset \mathbb{N}$  est un sous-ensemble infini, alors  $(A, <)$  est isomorphe à  $(\mathbb{N}, <)$ .
4. Soit  $(X, <)$  un ensemble totalement ordonné. Montrer que  $(X, <)$  est un bon ordre si et seulement s'il ne contient pas de suite strictement décroissante d'éléments.
5. Montrer qu'un ensemble  $X$  muni d'un ordre total  $<$  est fini si à la fois  $<$  et son inverse définissent des bons ordres sur  $X$ .
6. On dira qu'une relation d'ordre total  $<$  définie sur un ensemble  $X$  est *dense* si pour tous  $a, b \in X$  distincts tels que  $a < b$ , il existe  $c \in X$  différent de  $a$  et de  $b$  tel que  $a < c < b$ . Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles dénombrables densement ordonnés et qui ne sont ni majorés ni minorés, alors ils sont isomorphes.

### Exercice 7 (Plongements de bons ordres.)

Un plongement d'un ensemble ordonné  $(X, <)$  dans un autre  $(Y, <')$  est une injection  $f : X \longrightarrow Y$  qui préserve l'ordre : pour tous  $x, x' \in X$ ,  $f(x) < f(x')$  si et seulement si  $x < x'$ .

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans  $(\mathbb{Q}, <)$ .
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans  $(\mathbb{R}, <)$  ?

### Exercice 8 (Segments initiaux.)

**A.** Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné  $(X, <)$  qui contient un segment initial propre qui n'est pas de la forme  $\{x \in X \mid x < a\}$  pour un certain  $a \in X$ .

**B.** Soit  $(X, <)$  un ensemble totalement ordonné. Notons  $I_X$  l'ensemble des segments initiaux propres de  $X$  et  $\sigma : X \rightarrow I_X$  qui associe à chaque  $x \in X$  le segment initial propre  $X_{<x} = \{y \in X \mid y < x\}$ .

1. Vérifier que  $\sigma$  est injective.
2. Montrer que  $\sigma$  est surjective si et seulement si  $(X, <)$  est un bon ordre.
3. Si  $(X, <)$  est un bon ordre, montrer que  $S(X) = X \cup \{X\}$  admet un bon ordre isomorphe à  $(J_X, \subset)$ , où  $J_X$  est l'ensemble de tous les segments initiaux de  $X$ .
4. Que peut-on dire de  $X$  si pour tout  $x \in X$ ,  $x = X_{<x}$  ?

### Exercice 9 (Propriétés élémentaires des ordinaux.)

1. Montrer qu'un ordinal  $\alpha$  est un entier naturel (donc, un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de  $\alpha$  a un plus grand élément.
2. Montrer qu'un ordinal  $\alpha$  est limite si et seulement si  $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta \in \alpha\}$ .
3. Montrer que si  $\alpha, \beta$  sont deux ordinaux et  $f : \alpha \rightarrow \beta$  est strictement croissante alors  $\alpha \leq \beta$ .
4. Montrer que si  $A$  est une partie d'un ordinal  $\alpha$ , alors l'appartenance définit sur  $A$  une relation de bon ordre qui est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à  $\alpha$ .

**Exercice 10 (L'univers  $V$  et l'axiome de fondation.)** On définit une hiérarchie d'ensembles  $(V_\alpha)$  indexée par les ordinaux en posant :

- $V_0 = \emptyset$  ;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$  ;
- Si  $\alpha$  est limite,  $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ .

1. Montrer que  $V_\alpha$  est un ensemble transitif pour tout  $\alpha$ .
2. Montrer que  $\beta < \alpha$ ssi  $V_\beta \in V_\alpha$ , et que  $\beta \leq \alpha$ ssi  $V_\beta \subseteq V_\alpha$ .
3. Si  $x$  est un ensemble, on définit son *rang*  $rg(x)$  en posant

$$rg(x) = \begin{cases} \text{le plus petit } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $rg(\alpha) = \alpha$  pour tout ordinal  $\alpha$ .

4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble  $x$ , il existe un ordinal  $\gamma$  tel que  $x \in V_\gamma$ .
5. Montrer que la classe  $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$  satisfait les axiomes de ZF. En déduire que si Z est consistant, ZF aussi.

**Exercice 11 (Somme ordinaire.)** Rappelons la définition par récurrence transfinie de la somme de deux ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0 \\ S(\alpha + \gamma) & \text{si } \beta = S(\gamma) \\ \sup(\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire une opération sur les bons ordres qui est équivalente :

1. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles bien ordonnés. Montrer que l'on peut supposer qu'ils sont disjoints.

2. On suppose maintenant  $A \cap B = \emptyset$  et on considère  $X = A \cup B$ . Montrer que l'on peut définir de manière unique un bon ordre sur  $X$  prolongeant celui de  $A$  et celui de  $B$  (i.e. tel que l'ordre de  $X$  induise ceux de  $A$  et de  $B$ ) et tel que  $A$  soit un segment initial de  $X$ .
3. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont respectivement isomorphes aux ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$  alors  $X$  est isomorphe à  $\alpha + \beta$ .
4. En déduire les propriétés suivantes de l'addition ordinaire :
  - (a) associativité;
  - (b) non commutativité;
  - (c) monotonie stricte à droite, i.e  $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$ ;
  - (d) régularité à gauche, i.e  $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$ ;
  - (e) non monotonie stricte à gauche et non régularité à droite;
  - (f)  $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$ .

**Exercice 12 (Multiplication ordinaire.)** Rappelons la définition par récurrence transfinie du produit de deux ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ (\alpha \cdot \gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup(\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Soient deux ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$ , nous allons définir un bon ordre sur l'ensemble  $\alpha \times \beta$  qui sera isomorphe à l'ordinal  $\alpha \cdot \beta$  :

1. On munit  $\alpha \times \beta$  de l'ordre (anti-)lexicographique suivant

$$(\gamma_1, \delta_1) < (\gamma_2, \delta_2) \text{ ssi } \delta_1 < \delta_2 \text{ ou } (\delta_1 = \delta_2 \& \gamma_1 < \gamma_2).$$

Montrer que cela définit un bon ordre sur  $\alpha \times \beta$ .

2. Montrer que ce bon ordre est isomorphe à l'ordinal  $\alpha \cdot \beta$ .
3. En déduire les propriétés suivantes de la multiplication ordinaire :
  - (a) associativité;
  - (b) non commutativité;
  - (c) si  $\alpha > 0$  et  $\beta < \gamma$  alors  $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ ;
  - (d) si  $\alpha \leq \beta$  alors  $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ ;
  - (e)  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ;

**Exercice 13 (Soustraction et division euclidienne sur les ordinaux.)**

1. Montrer que l'on peut définir une opération  $\ominus$  sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux  $\alpha, \beta$  on ait :
  - $\alpha \ominus \beta = 0$  si  $\alpha < \beta$
  - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$  si  $\alpha \geq \beta$ .
 Donner un exemple d'ordinaux  $\alpha > \beta$  tels qu'il n'existe pas d'ordinal  $\gamma$  tel que  $\gamma + \beta = \alpha$ .
2. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux avec  $\beta \neq 0$ . Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux  $(\gamma, \delta)$  tel que  $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$  et  $\delta < \beta$ .  
 (Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe  $\gamma'$  tel que  $\alpha < \beta \cdot \gamma'$  et que le plus petit tel  $\gamma'$  est successeur).

**Exercice 14 (Puissance ordinale.)** Rappelons la définition par récurrence transfinie de  $\alpha > 0$  à la puissance  $\beta$  :

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup(\{\alpha^\xi : \xi < \beta\}) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

1. Vérifiez les propriétés suivantes pour  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois ordinaux :
  - si  $\alpha > 1$  et  $\beta > \gamma$  alors  $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$ ;
  - $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ ;
  - $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$ .
2. Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont dénombrables alors  $\alpha^\beta$  est aussi dénombrable<sup>1</sup>
3. Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable  $\xi$  tel que  $\xi = \omega^\xi$ . Existe-t-il un ordinal tel que  $\xi = \xi^\omega$  ?

**Exercice 15 (Développement de Cantor.)** On souhaite ici démontrer que tout ordinal admet un « développement en base  $\omega$  », autrement dit que tout ordinal  $\alpha$  non nul s'écrit de manière unique

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_m} n_m$$

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des ordinaux tels que  $\alpha_1 > \dots > \alpha_m$  et  $n_1, \dots, n_m$  des entiers non nuls. On appelle ce développement le *développement de Cantor* de  $\alpha$ .

1. Montrer que pour tout ordinal  $\alpha$  on a  $\omega^\alpha \geq \alpha$ .
2. Montrer que pour tout ordinal  $\alpha$  non nul il existe un unique couple  $(\alpha_1, n_1)$  tel que

$$\omega^{\alpha_1} n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} (n_1 + 1).$$

3. En déduire qu'il existe un unique  $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$  tel que  $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \beta_1$ .
4. Montrer l'existence du développement de Cantor et son unicité.
5. Montrer que les ordinaux de la forme  $\omega^\alpha$  sont exactement les ordinaux  $\beta$  tels que pour tout  $\gamma < \beta$  on ait  $\gamma + \beta = \beta$ .
6. En déduire le développement de Cantor de  $\alpha + \beta$  connaissant le développement de Cantor de  $\alpha$  et celui de  $\beta$ .

---

1. en particulier,  $\alpha^\beta$  ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de  $\beta$  dans  $\alpha$  : ça, c'est la puissance *cardinale*.