Pour cocher une case, mettez une croix avec un stylo bleu ou noir : ☒. Si vous utilisez du blanc pour modifier une réponse, NE REDESSINEZ PAS la case vide !

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶ et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom : ....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Groupes et géométrie — CC1 — 8 octobre 2020

Règlement – L'épreuve dure une heure. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Il n'est admis de consulter aucun document.

Le sujet comporte deux partie, de poids égal.

Dans chaque partie, les poids des questions sont égaux.

Une mauvaise réponse pourrait vous faire perdre des points. Ne répondez que si vous êtes (suffisamment) sûrs de votre réponse.

Partie I

Question 1
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et $*$ l'addition modulo n. Lequel est vrai ?

- ☐ $(G, *)$ est un groupe monogène, quel que soit n
- ☐ $(G, *)$ n'est pas un groupe, quel que soit n
- ☐ Le fait que $(G, *)$ soit ou non un groupe dépend de n
- ☐ $(G, *)$ est un groupe non monogène, quel que soit n

Question 2
Soit $G = \mathbf{R}$, et $*$ l'opération

$$x * y = xy + x + y.$$

Lequel est vrai ?

- ☐ $(G, *)$ n'est pas un groupe
- ☐ $(G, *)$ est un groupe non abélien
- ☐ $(G, *)$ est un groupe abélien

Question 3
Soit $G = [0, 1[$. On définit deux opérations sur G :

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y < 1, \\ x + y - 1 & \text{si } x + y \geq 1. \end{cases}$$

$$x \odot y = \begin{cases} xy & \text{si } xy < 1, \\ xy - 1 & \text{si } xy \geq 1. \end{cases}$$

- ☐ $(G, \odot)$ et $(G, *)$ sont des groupes
- ☐ $(G, \odot)$ est un groupe, $(G, *)$ ne l'est pas
- ☐ $(G, *)$ est un groupe, $(G, \odot)$ ne l'est pas
- ☐ Ni $(G, *)$ ni $(G, \odot)$ n'est un groupe

Question 4
Soit $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbf{C}$, et $*$ la multiplication des nombres complexes.

- ☐ $(G, *)$ n'est pas un groupe
- ☐ $(G, *)$ est un groupe monogène
- ☐ $(G, *)$ est un groupe non monogène

Question 5
Soit $G = \{\ 1,\ \ (1\ 4),\ \ (2\ 3),\ \ (1\ 4)(2\ 3)\ \} \subseteq S_4$, muni de la composition de permutations.

- ☐ $(G, *)$ est un groupe monogène
- ☐ $(G, *)$ est un groupe non monogène
- ☐ $(G, *)$ n'est pas un groupe

Question 6
Soit $G_1 = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, le groupe des matrices inversibles 2×2 à coefficients réels, muni de la loi du produit de matrices. Soit $G_2 = \mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$ (pareil, mais 3×3). Soit

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- ☐ H_1 est un sous sous-groupe de G_1 et H_2 n'est pas un sous-groupe de G_2
- ☐ H_1 est un sous sous-groupe de G_1 et H_2 est un sous-groupe de G_2
- ☐ H_1 n'est pas un sous sous-groupe de G_1 et H_2 n'est pas un sous-groupe de G_2
- ☐ H_1 n'est pas un sous sous-groupe de G_1 et H_2 est un sous-groupe de G_2

Question 7
Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \right\}$$

et soit $*$ la multiplication de matrices.

- ☐ $(G, *)$ est un groupe abélien
- ☐ $(G, *)$ n'est pas un groupe
- ☐ $(G, *)$ est un groupe non abélien

Question 8
Soit $G = (\mathbf{R}, +)$. Soit $H = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels, muni du produit de matrices.
L'application $\varphi \colon G \to H$, définie par $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est-elle un morphisme de groupes ?

- ☐ Non.
- ☐ Oui.

Question 9
Soit $G = (\mathbf{R}, +)$. Soit $H = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels, muni du produit de matrices.
L'application $\varphi \colon G \to H$, définie par $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ est-elle un morphisme de groupes ?

- ☐ Non.
- ☐ Oui.

Question 10
Soit $H = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels, muni du produit de matrices.
L'application $\varphi \colon H \to (\mathbf{R}^{\times}, \cdot)$, définie par $\varphi(A) = \det(A)$ est-elle un morphisme de groupes ?

- ☐ Non.
- ☐ Oui.

Partie II

Question 11
Soit $G = S_5$, et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ordre de σ est (indication : calculer sa décomposition en produit de cycles disjoints) :

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ -3

Question 12
Soit $G = S_5$, et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-il possible d'exprimer σ comme produit de n transpositions ? (Exactement l'une des possibilités suivantes est valide)

- ☐ Ce n'est possible pour aucun n.
- ☐ Il existe n impair tel que c'est possible.
- ☐ Il existe n pair tel que c'est possible.

Question 13
Soit $G = S_5$, et soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer σ^{33} (indication : calculer d'abord la décomposition en produit de cycles disjoints) :

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Question 14 Soit G un groupe, et $H, K \leq G$ deux sous-groupes. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ☐2.5 ☐3 ☐3.5 ☐4 ☐4.5 ☐5

Répondez ici :