¿ CF?

Problème 1. Soit G un groupe d'ordre 2021.

1. Combien de 43-Sylow possède-t-il ?
2. Combien de 47-Sylow possède-t-il ?
3. Montrer que G est un groupe abélien.
4. Combien de générateurs possède-t-il ? (c'est-à-dire, combien de $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$?)

Problème 2. Soit G un groupe fini et X un ensemble non vide. Soit $G \curvearrowright X$ une action de G sur X. On rappelle la *formule de Burnside* :

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|,$$

où Ω est la famille des orbites de l'action $G \curvearrowright X$, et $\operatorname{Fix}(g)$ est l'ensemble des *points fixes* de g :

$$\operatorname{Fix}(g) = \big\{x \in X : gx = x\big\}.$$

On rappelle également que l'action $G \curvearrowright X$ est *transitive* si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

1. Montrer que l'action $G \curvearrowright X$ est transitive si et seulement si elle admet exactement une orbite.
2. Montrer que si $G \curvearrowright X$ est une action transitive et $|X| \geq 2$, alors il existe $g \in G$ agissant sans point fixe (c'est à dire, tel que $\operatorname{Fix}(g) = \varnothing$).
3. Soit $H \leq G$ un sous-groupe, et considérons l'action par translation $G \curvearrowright G/H$, définie par

   $$f \cdot (gH) = fgH.$$

   Cette action est-elle transitive pour tout sous-groupe H ?
4. Montrer que pour $f, g \in G$:

   $$fgH = gH \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in gHg^{-1}.$$

5. Déduire que si $H < G$ est un sous-groupe *strict* (c'est à dire, distinct de G), alors

   $$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Problème 3. Nous considérons le groupe de permutations $G = S_n$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que si $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k) \in S_n$ est un cycle et $\tau \in S_n$, alors

   $$\tau\sigma\tau^{-1} = \big(\tau(a_1)\ \tau(a_2)\ \ldots\ \tau(a_k)\big).$$

2. Soit maintenant $\sigma, \tau \in S_n$ quelconques. Supposant que la décomposition de σ en cycles à supports disjoints est connue, comment calculer une telle décomposition pour $\tau\sigma\tau^{-1}$?

3. On rappelle que $g, f \in G$ sont *conjugués* s'il existe $h \in G$ tel que $f = hgh^{-1}$. Montrer que deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ sont conjuguées si et seulement si exactement l'une des conditions suivantes est vérifiée :

   - $\sigma_1 = \sigma_2 = e$.
   - σ_1 et σ_2 sont des 2-cycles (des transpositions).
   - σ_1 et σ_2 sont des 3-cycles.

4. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour S_4. Combien y a-t-il de classes de conjugaison (= classes d'équivalence modulo la relation de conjugaison) dans S_4 ?

Problème 4. Soit G un groupe. On rappelle que le *commutateur* de $x, y \in G$ est :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Montrer que si $H \leq G$ et $[x, y] \in H$ pour toute paire $x, y \in G$, alors $H \trianglelefteq G$, et G/H est abélien.