UCBL – L3 Mathématiques Générales et Applications Automne 2021
UE Groupes et Géométrie

CC1 du 4 novembre 2021

Durée : 1h30

Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.

Question 1. Vrai ou faux? Justifier en moins d'un paragraphe, en donnant un argument cours, évoquant un résultat du cours (ou du TD), ou en donnant un exemple / contre-exemple, selon ce qui convient.

1. Si G est un groupe fini et $x \in G$, alors $\mathrm{ord}(x)$ divise $|G|$.
2. Si G est un groupe fini et $A \subseteq G$ est une partie, alors $|A|$ divise $|G|$.
3. Si G est un groupe fini et $H \leq G$ est un sous-groupe, alors l'indice $[G : H]$ divise $|G|$.
4. Si G et H sont deux groupes non-triviaux (c'est à dire, $G \neq \{e_G\}$ et $H \neq \{e_H\}$), alors il existe un morphisme $\varphi\colon G \to H$ qui n'est pas trivial (n'est pas constamment égal à e_H).

Question 2. Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe, pour la loi de composition.
Pour cette question, aucun résultat du CM ou du TD n'est autorisé – vous devez tout démontrer.

Soit G, H et K des groupes. On rappelle que $H \times K$ (le *produit direct* des groupes H et K) est un groupe, pour la loi $(h, k) \cdot (h', k') = (hh', kk')$.

Question 3.

1. Soit $\alpha\colon G \to H$ et $\beta\colon G \to K$ deux morphismes de groupes. Montrer que
$$\varphi(g) = \Big(\alpha(g), \beta(g)\Big)$$
définit un morphisme $G \to H \times K$.
2. Réciproquement, montrer que si $\varphi\colon G \to H \times K$ est un morphisme, alors il s'exprime comme plus haut pour une unique paire de morphismes α, β.

Question 4.

1. Soit $\alpha\colon H \to G$ et $\beta\colon K \to G$ deux morphismes de groupes, et supposons de surcroît que
$$\alpha(h)\beta(k) = \beta(k)\alpha(h) \qquad \forall h \in H,\ k \in K \tag{*}$$
Montrer que
$$\varphi(h, k) = \alpha(h)\beta(k)$$
définit un morphisme $H \times K \to G$.
2. Réciproquement, montrer que si $\varphi\colon H \times K \to G$ est un morphisme, alors il s'exprime comme plus haut pour une unique paire de morphismes α, β, et que cette paire vérifie (*).

Question 5. Soit G un groupe et soit H et K deux sous-groupes de G tels que $HK = G$, et
$$hkh^{-1}k^{-1} = e \qquad \forall h \in H,\ k \in K.$$
Montrer que H et K sont des sous-groupes distingués de G.