

CC2 du 9 décembre 2021

Durée : 1h30

Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.

Question 1. Vrai ou faux? Justifier en moins d'un paragraphe, en donnant un argument court, évoquant un résultat du cours (ou du TD), ou en donnant un exemple / contre-exemple, selon ce qui convient.

1. Soit G un groupe non-trivial et $x \in G \setminus \{e\}$. Alors $C_G(x)$ est un groupe non-trivial (voir la question suivante pour la définition de $C_G(x)$).
2. Soit G un groupe non-trivial et $x = e \in G$. Alors $C_G(x)$ est un sous-groupe non-trivial.
3. Soit G et H deux groupes. Alors $G \times H \simeq H \times G$.
4. Soit G un groupe et $H, K \leq G$. Alors $G = H \times_i K$ ssi $G = K \times_i H$, où \times_i désigne le produit direct interne.
5. Soit G un groupe et $H, K \leq G$. Alors $G = H \rtimes K$ ssi $G = K \rtimes H$, où \rtimes désigne le produit semi-direct interne.
6. Soit $H \leq G$. Alors il existe un morphisme de G vers un troisième groupe dont H est le noyau.
7. Soit $H \trianglelefteq G$. Alors il existe un morphisme de G vers un troisième groupe dont H est le noyau.
8. Supposons que $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$. Alors $H \trianglelefteq G$.

Question 2. Soit G un groupe et $x \in G$. Montrer que l'ensemble

$$C_G(x) = \{y \in G : yx = xy\}$$

est un sous-groupe de G .

Question 3. Soit $G \curvearrowright X$ une action d'un groupe fini G sur un ensemble fini $X \neq \emptyset$.

1. Montrer que $g \cdot (x, y) = (gx, gy)$ définit une action $G \curvearrowright X^2$.
2. Quel est le stabilisateur de $(x, y) \in X^2$?
3. Pour $g \in G$, soit

$$Fix(g) = \{x \in X : gx = x\}.$$

Montrer que le nombre d'orbites de l'action $G \curvearrowright X^2$ est

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|^2.$$