Contrôle Final du 10 janvier 2022

Durée : 2h

Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.

Question 1. Vrai ou faux ? Justifier *en moins d'un paragraphe*, en donnant un argument succinct, ou en fournissant un exemple / contre-exemple, selon ce qui convient.
Attention : bien identifier « ce qui convient » fait partie de l'exercice.
Attention bis : la justification ne doit pas dépasser un paragraphe – il faut montrer que vous savez pourquoi c'est la bonne réponse, sans forcément donner un argument complet et détaillé.
Attention ter : « c'est un résultat du cours » seul n'est pas acceptable comme justification – dans ce cas, rappeler (d'une manière succincte...) pourquoi c'est vrai.

1. Deux groupes finis sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.
2. Deux groupes abéliens finis sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.
3. Deux groupes cycliques finis sont isomorphes si et seulement si ils ont la même cardinalité.
4. Soient C_6 et C_7 des groupes cycliques d'ordres 6 et 7, respectivement. Alors $C_6 \times C_7$ est cyclique.
5. Soient C_6 et C_8 des groupes cycliques d'ordres 6 et 8, respectivement. Alors $C_6 \times C_8$ est cyclique.
6. Soit G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. Si N et G/N sont tous les deux cycliques alors G est cyclique.
7. Soit G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. Si N et G/N sont tous les deux cycliques alors G est abélien.
8. Soit G un groupe fini et $a, b \in G$. Alors l'ordre de ab est égal à l'ordre de ba.
9. Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G d'indice n. Alors $x^n \in H$ pour tout $x \in G$.
10. Soit G un groupe fini et H une partie non-vide de G. Si $xy \in H$ pour tout $x, y \in H$ alors H est un sous-groupe de G.

Question 2. Soit G un groupe et H et K des sous-groupes de G. Soit

$$A = HK = \{hk : h \in H,\ k \in K\} \subseteq G.$$

Montrer que A est un sous-groupe de G si et seulement si $A = KH$.

Suite à la page 2

Question 3. Soit G un groupe.

1. Rappeler la définition du centre $Z(G)$.
2. Montrer que $Z(G)$ est abélien.
3. Montrer que $Z(G) \trianglelefteq G$.
4. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

Question 4. Admettant les résultats de la question précédente, montrer que pour tout groupe G, l'indice $\left[G : Z(G)\right]$ n'est jamais égal à 2, ni à 3.

Question 5. Considérons l'action naturelle de $G = S_3$ sur l'ensemble $X = \{1,2,3\}$, donnée par $(\sigma, n) \mapsto \sigma(n)$.

1. Montrer que c'est bien une action.
2. Combien de points fixes a le neutre $e \in G$ pour cette action ? Une transposition ? Un 3-cycle ?
3. *En appliquant la formule de Burnside*, calculer le nombre d'orbites.
4. Calculer le nombre d'orbites d'une autre manière.