UCBL – L3 Mathématiques Générales et Applications Automne 2022
UE Groupes

CP du 26 octobre 2022

Durée : 1h

Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.

Pour chaque question ou sous-question vous avez la possibilité de répondre ń JE NE SAIS PAS ż pour 20% des points. Cette réponse est incompatible avec toute tentative de répondre à une question.

Question 1 (5 pts)**.** Vrai ou faux ? Justifier en **moins d'un paragraphe**, évoquant un résultat du cours (ou du TD), ou en donnant un exemple / contre-exemple, selon ce qui convient.

1. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors l'application $\varphi\colon G \to G$, qui à $y \in G$ associe yx, est un morphisme.
2. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors l'application $\varphi\colon G \to G$, qui à $y \in G$ associe $x^{-1}yx$, est un morphisme.
3. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors l'application $\varphi\colon G \to G$, qui à $y \in G$ associe yxy^{-1}, est un morphisme.
4. Le groupe S_3 admet un sous-groupe d'ordre trois.
5. Le groupe S_3 admet un sous-groupe d'ordre quatre.

Question 2 (4 pts)**.** Soit $G = \mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels et inversibles. Nous admettrons que c'est un groupe, pour la loi de multiplication de matrices.

Soit $H = O(2,\mathbf{R})$ l'ensemble 2×2 à coefficients réels qui vérifient ${}^tAA = I_2$. Montrer que $H \leq G$.

Si vous utilisez un critère du cours, citez-le explicitement.

Question 3 (3 pts)**.** Soit G un groupe, et

$$S = \left\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\right\}.$$

Montrer que $zSz^{-1} = S$ pour tout $z \in G$.

Question 4 (8 pts)**.** Soit G, H des groupes et $\varphi\colon G \twoheadrightarrow H$ un morphisme surjectif.

1. (2 pts) Pour $x, y \in G$, notons $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que si H est un groupe abélien, alors $[x, y] \in \ker\varphi$ pour tous $x, y \in G$.
2. (2 pts) Soit
$$G' = \Big\langle [x, y] : x, y \in G \Big\rangle,$$
le sous-groupe de G engendré par tous les $[x, y]$. Montrer que si H est un groupe abélien, alors $G' \leq \ker\varphi$.
3. (4 pts) Réciproquement, supposons que $G' \leq \ker\varphi$. Montrer que H est un groupe abélien.