UCBL – L3 Mathématiques Générales et Applications — Automne 2022
UE Groupes

# CT du 4 janvier 2023

**Durée :** 2h

*Les calculatrices, ordinateurs, tablettes et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve ainsi que les notes de cours et TD.*

Lorsque vous répondez à une question, vous pouvez admettre comme établis les énoncés des questions précédentes.

**Pour chaque question ou sous-question vous avez la possibilité de répondre ń JE NE SAIS PAS ż pour 20% des points. Cette réponse est incompatible avec toute tentative de répondre à une question.**

**Exercice 1.** Vrai ou faux? Justifier en **moins d'un paragraphe**, évoquant un résultat du cours (ou du TD), ou en donnant un exemple / contre-exemple, selon ce qui convient.

1. Soit $G$ un groupe et $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe distingué. Soit $K$ un autre groupe, et $\varphi\colon G \to K$ un morphisme. Alors $\varphi(H) \trianglelefteq K$.
2. Soit $G$ un groupe et $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe distingué. Soit $K$ un autre groupe, et $\varphi\colon K \to G$ un morphisme. Alors $\varphi^{-1}(H) \trianglelefteq K$.
3. Soit $G$ un groupe d'ordre 15 agissant sur un ensemble $X$ de cardinal 7. Alors il existe $x \in X$ tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$.
4. Le groupe de permutations $S_5$ admet exactement dix sous-groupes d'ordre deux.
5. Soit $G$ un groupe d'ordre $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Alors $G$ admet un unique sous-groupe d'ordre 13.
6. Il existe un groupe non abélien d'ordre 6.
7. Il existe un groupe non abélien d'ordre 15.
8. Soit $G$ un groupe et $H, K \leq G$ deux sous-groupes d'ordres $|H| = n$ et $|K| = m$. On suppose que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Alors $|H \cap K| = 1$.
9. Soit $G$ un groupe et $H, K \leq G$ deux sous-groupes d'ordres $|H| = n$ et $|K| = m$. On suppose que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Alors $|HK| = mn$.
10. Soit $G$ un groupe dont tout sous-groupe propre est abélien. Alors $G$ est engendré par 2 éléments.

**Exercice 2** (Question du cours / TD)**.** Soit $G$ un groupe d'ordre $p^n$, où $p$ est premier et $n \geq 1$. Nous allons considérer l'action par conjugaison $G \curvearrowright G$.

1. Montrer que si $O$ est une orbite, alors ou bien $|O| = 1$, ou bien $|O|$ est divisible par $p$.
2. Montrer que les orbites de cardinal un sont exactement les singletons $\{x\}$ où $x \in Z(G)$.
3. Montrer que l'action par conjugaison admet au moins une orbite de cardinal un.
4. Montrer que l'action par conjugaison admet plus d'une orbite de cardinal un.
5. Déduire que $Z(G) \neq \{e\}$.

**Exercice 3.** Soit $G$ un groupe fini.

1. Montrer que $Z(G) \trianglelefteq G$, et que $G/Z(G)$ est un groupe fini.

2. On définit par récurrence : $G_0 = G$ et $G_{k+1} = G_k/Z(G_k)$. Montrer que la suite des cardinaux $|G_k|$ est décroissante.

3. Nous dirons que $G$ est *nilpotent* s'il existe $k$ tel que $G_k = \{e\}$. Montrer que si $|G| = p^n$, où $p$ est premier et $n \geq 0$, alors $G$ est nilpotent.

**Exercice 4.** Soit $G$ un groupe d'ordre 168, dont les seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et $G$ (un tel groupe est dit *simple*).

1. Décomposer 168 en facteurs premiers.

2. Déterminer $N_7$, le nombre des 7-Sylows de $G$.

3. Montrer que si $H$ et $K$ sont deux 7-Sylows distincts de $G$ alors $H \cap K = \{e\}$.

4. En déduire le nombre des $g \in G$ d'ordre 7.