Examen (9 janvier 2024)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Soit G un groupe d'ordre p où p est un nombre premier. Montrer que G est cyclique.
2. Pour une permutation $\sigma \in S_n$ on note par $\epsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ sa signature. Soit $\sigma \in S_{10}$ donnée par
$$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10).$$
Calculer $\epsilon(\sigma)$. Est-ce que la réponse change si on considère σ comme un élément de S_{11} ?
3. Combien de classes de conjugaison y a-t-il dans S_4 ? Pour chaque classe de conjugaison, donner un représentant de cette classe.
4. Les groupes D_{24} et S_4 sont-ils isomorphes ?
5. Soit $\phi \colon G \to H$ un morphisme de groupes et soit $g \in G$ un élément d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $\phi(g)$ divise l'ordre de g.
6. Montrer que tous les éléments du groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont d'ordre fini. (Ici $\mathbf{Q}$ est le groupe additif des nombres rationnels et $\mathbf{Z}$ est le sous-groupe des entiers.)
7. Soit
$$H = \{\frac{a}{2^k} : a, k \in \mathbf{Z}\}.$$
   (a) Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbf{Q}, +)$.
   (b) Montrer que $\phi \colon H \to H$ défini par $\phi(h) = 2h$ est un automorphisme de H.
   (c) Soit $G = H \rtimes \mathbf{Z}$ où le générateur 1 de $\mathbf{Z}$ agit sur H par ϕ. Soit $g \in G$ donné par $g = (1, 1)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ calculer g^n.
8. Soit G un groupe et $H \leq G$ avec $[G : H] = n$ avec n fini. Montrer qu'il existe un sous-groupe $N \trianglelefteq G$ avec $N \leq H$ et $[G : N] \leq n!$. (*Indication* : Considérer une action convenable de G.)
9. Soit G un groupe fini et soient $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.
   (a) Montrer que si $|H|$ et $[G : N]$ sont premiers entre eux, alors $H \leq N$.
   (b) Montrer que si $|N|$ et $[G : H]$ sont premiers entre eux, alors $N \leq H$.
   (*Indication pour (b)* : Considérer l'action $N \curvearrowright G/H$.)
10. Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est jamais simple. (*Indication :* Distinguer les cas $p < q$, $p = q$, $p > q$.)