Université Claude Bernard Lyon 1 — L3 Mathématiques : Groupes
Automne 2023

CONTRÔLE PARTIEL
Mercredi 25 octobre 2023 – Durée : 1h30 (08h00 - 09h30)

Les documents, écrans, téléphones portables et calculettes ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Choisir la réponse A ou B. On justifiera toute réponse par un argument clair ou un contre-exemple.

1. Tout groupe dont l'ordre est un nombre premier est abélien.

A. Vrai B. Faux

2. Si deux sous-groupes H et K d'un groupe G, d'ordre m et n vérifient $\text{pgcd}(m, n) = 1$, alors $H \cap K = \{e\}$.

A. Vrai B. Faux

3. Soit le cycle $c = (12345678)$ dans le groupe des permutations S_8. La liste L des ordres de c^l, $l \in [1, 7]$, est $L = (8, 4, 8, 2, 8, 4, 8)$.

A. Vrai B. Faux

4. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe distingué d'indice n. Alors quel que soit $g \in G$, $g^n \in H$.

A. Vrai B. Faux

5. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes et soit x un élément de G d'ordre fini. Alors l'ordre de x divise l'ordre de $f(x)$.

A. Vrai B. Faux

6. Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier ne divisant pas $|G|$. Alors l'application $G \to G : x \mapsto x^p$ est un automorphisme de G.

A. Vrai B. Faux

7. L'ordre maximal d'une permutation de S_5 vaut 5.

A. Vrai B. Faux

Exercice 2. On dit de deux éléments a, b d'un groupe G qu'ils sont *conjugués* s'il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}ag = b$. Soit G un groupe.

1. Montrer que si deux éléments de G sont conjugués alors ils ont le même ordre.
2. Déterminer deux éléments dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui ont le même ordre mais qui ne sont pas conjugués.
3. Déterminer tous les groupes abéliens G qui vérifient : deux éléments sont conjugués si et seulement si ils ont le même ordre.
4. Est-ce que n'importe quels deux éléments de S_3 sont conjugués si et seulement si ils ont le même ordre ?

Exercice 3. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e et de loi $(a, b) \mapsto ab$. Pour un entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$G_n = \{g \in G,\ g^n = e\}.$$

On souhaite décrire l'ensemble $Hom(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, G)$ des morphismes $\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to G$ du groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ vers G. Pour $\varphi \in Hom(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, G)$, on notera $\varphi(\overline{1}) = \hat{\varphi}$.

1. Montrer que $\hat{\varphi} \in G_n$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Hom(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, G) & \to & G_n \\ \varphi & \mapsto & \Psi(\varphi) = \hat{\varphi} \end{array}$$

2. Montrer que Ψ est injective.
3. Soit $g \in G_n$.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbf{Z} \to G : l \mapsto g^l$ est un morphisme et $n\mathbf{Z} \leq Ker f$.
   (b) En déduire qu'il existe un morphisme $\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to G$ tel que $\hat{\varphi} = g$.
4. Conclure que Ψ est bijective.
5. On suppose ici que G est le groupe U_m des racines $m-$ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$. On rappelle que $U_m = \langle \zeta \rangle$ où $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$.
   (a) Montrer que $(\zeta^k)^n = 1$ ssi $\frac{m}{\text{pgcd}(n,m)}$ divise k.
   (b) En déduire la valeur du cardinal $|Hom(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, U_m)|$.
   (c) A titre d'exemple établir la liste des morphismes de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to U_6$.