---

**Examen partiel**

---

*Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Les téléphones, calculatrices et documents de cours sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.*

**Exercice 1** (6 points)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Pour chaque assertion **justifier** en citant un résultat du cours (ou du TD), ou en donnant un exemple/contre-exemple, selon ce qui convient. Une réponse vrai/faux correcte mais sans justification ne donne aucun point.

1. Soit $H := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$.
   L'ensemble $H$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Le groupe diédral $D_8$ possède un sous-groupe d'ordre 3.
3. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ est simple.
4. Soit $G$ un groupe et soit $D(G) := \langle [g,h] \ : \ g, h \in G \rangle$. Le groupe $G/D(G)$ est abélien.
   *(On rappelle que si $g, h \in G$ alors $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$.)*
5. Tous les groupes d'ordre $n \leq 5$ sont abéliens.

**Exercice 2** (2 points)**.**
Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

**Exercice 3** (2,5 points)**.** Soit $\sigma$ l'élément de $\mathfrak{S}_7$ défini par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer la signature de $\sigma$.
3. Calculer $\sigma^{2024}$.

**Exercice 4** (3,5 points)**.**

1. Soit $f : (\mathbb{Z}^3, +) \to (\mathbb{Q}_{>0}, \times)$ définie par $f(a,b,c) = 2^a 3^b 6^c$.
   (a) Montrer que $f$ est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.
   (b) Le morphisme $f$ est-il surjectif ?
2. Existe-t-il un morphisme de groupes surjectif de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ?

**(Suite du sujet au verso)**

**Exercice 5** (6 points)**.** Soit $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}$.

1. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
2. Soit $p$ un entier positif non nul. Soit $\varphi : G \to G, z \mapsto z^p$. Montrer que $\varphi$ est un morphisme de groupes et déterminer son image.
3. Justifier que $\ker(\varphi)$ est distingué dans $G$.
4. Montrer qu'il existe un sous-groupe non-trivial et distingué $H$ de $G$ tel que le groupe quotient $G/H$ soit isomorphe à $G$
5. Une telle situation (celle de la question 4) serait-elle possible si $G$ était fini ?