# Corrigé de l'examen du 9 janvier 2025

1. (2p.) Soit $G$ un groupe. Montrer que l'application $\phi\colon G \to G, \phi(g) = g^{-1}$ est un morphisme si et seulement si $G$ est abélien.

   *Solution.* Supposons d'abord que $G$ est abélien. Alors pour tout $g, h \in G$, $\phi(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = \phi(g)\phi(h)$ et donc $\phi$ est un morphisme. Inversement, si $\phi$ est un morphisme, par le même calcul, $h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ pour tous $g, h$, ce qui implique que $G$ est abélien. □

2. (3p.) Combien de morphismes différents $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ y a-t-il ?

   *Solution.* Comme $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ est cyclique, un morphisme $\phi\colon \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ est entièrement déterminé par $\phi(\bar{1})$. Comme $\bar{1} \in \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ est d'ordre 12, on doit avoir que $12 \cdot \phi(\bar{1}) = 0$, i.e., $\operatorname{ord}\phi(\bar{1}) \mid 12$. Les possibilités dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ sont : $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$, soit 4 morphismes en tout. □

3. (3p.) Soit $A$ un groupe abélien et soit $D = \{(a, a) : a \in A\}$.
   (a) Montrer que $D$ est un sous-groupe distingué de $A \times A$.

   *Solution.* $D$ est un sous-groupe car si $(a, a), (b, b) \in D$, alors $(a, a) - (b, b) = (a - b, a - b) \in D$. Il est distingué puisque tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué. □

   (b) Montrer que $(A \times A)/D \cong A$.

   *Solution.* Considérons le morphisme $\pi\colon A \times A \to A$ défini par $\pi(a, b) = a - b$. Il est surjectif car $\pi(a, 0) = a$ pour tout $a \in A$ et $\ker \pi = D$. Par le premier théorème d'isomorphisme, $A \times A/D \cong A$. □

4. (4p.)
   (a) Montrer que les seuls éléments de $S_8$ d'ordre 8 sont les 8-cycles.

   *Solution.* On rappelle que l'ordre d'une permutation est égal au ppcm des longueurs des cycles dans sa décomposition. Comme 8 est une puissance d'un nombre premier, le fait que le ppcm d'un ensemble $S$ d'entiers positifs soit égal à 8 entraîne que $8 \in S$. Donc toute permutation d'ordre 8 doit avoir un cycle de longueur 8 et dans les éléments de $S_8$ il n'y a pas de place pour d'autres cycles. □

   (b) Soit $\sigma$ le 8-cycle $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$. Pour quels entiers positifs $n$ $\sigma^n$ est aussi un 8-cycle ?

   *Solution.* L'ordre de l'élément $\sigma^n$ dans le groupe cyclique $\langle\sigma\rangle$ est égal à $8/\operatorname{pgcd}(8, n)$. Donc, par (a), $\sigma^n$ est un 8-cycle ssi $n$ est impair. □

   (c) Trouver des représentants de toutes les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6 dans $S_7$. Lesquelles de ces classes sont dans le groupe alterné $A_7$ ?

   *Solution.* Les structures de cycles avec ppcm 6 dans $S_7$ sont les suivantes : $(3, 2, 1, 1)$, $(3, 2, 2)$ et $(6, 1)$ avec des représentants $(1\ 2\ 3)(4\ 5), (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Les signatures respectives sont $-1, 1, -1$ et seule la classe de $(1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$ est dans $A_7$. □

5. (2p.) Montrer qu'un groupe $G$ d'ordre 312 a un $p$-Sylow distingué pour un nombre premier $p$ qui divise l'ordre de $G$.

*Solution.* Notons que $312 = 2^3 \times 3 \times 13$. Par le théorème de Sylow, $n_{13} \equiv 1 \mod 13$ et $n_{13} \mid 24$. Donc $n_{13} = 1$ et $G$ admet un seul 13-Sylow qui doit être distingué. □

6. (5p.) Soit $A$ un ensemble avec $|A| \geq 2$ et soit $G$ un groupe. L'action $G \curvearrowright A$ est dite *doublement transitive* si pour tout $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A^2$ avec $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot a_1 = a_2$ et $g \cdot b_1 = b_2$.

   (a) Montrer que l'action $G \curvearrowright A$ est doublement transitive si et seulement si elle est transitive et pour tout $a \in A$, le stabilisateur $G_a$ agit transitivement sur $A \setminus \{a\}$.

   *Solution.* Supposons d'abord que l'action est doublement transitive. Il est clair qu'elle est transitive. Soient maintenant $a \in A$ et $b, c \in A \setminus \{a\}$. Alors il existe $g \in G$ qui envoie $(a, b)$ sur $(a, c)$ : ceci est un élément de $G_a$ qui envoie $b$ sur $c$ et l'action de $G_a$ sur $A \setminus \{a\}$ est donc transitive. Pour l'autre sens, soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A^2$ avec $a_i \neq b_i$. Par la transitivité de l'action $G \curvearrowright A$, il existe $g_1 \in G$ tel que $g_1 \cdot a_1 = a_2$. De plus $b_2 \neq a_2$ et $g_1 \cdot b_1 \neq g_1 \cdot a_1 = a_2$ et par la deuxième hypothèse, il existe $g_2 \in G_{a_2}$ tel que $g_2 \cdot (g_1 \cdot b_1) = b_2$. Alors $(g_2 g_1) \cdot (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. □

   (b) Montrer que pour $n \geq 4$, l'action du groupe alterné $A_n \curvearrowright [n]$ est doublement transitive.

   *Solution.* D'abord l'action $A_n \curvearrowright [n]$ est transitive pour tout $n \geq 3$ : si $a, b, c$ sont trois éléments distincts de $[n]$, alors $(a\ b\ c) \cdot a = b$. Soit maintenant $n \geq 4$, $G = A_n$ et soient $a, b_1, b_2, c$ 4 éléments distincts de $[n]$. Alors $(b_1\ b_2\ c) \in G_a$ et $(b_1\ b_2\ c) \cdot b_1 = b_2$. □

7. (5p.) On note par $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathbf{R}$, i.e., les applications $f_{a,b} \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, où $f_{a,b}(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbf{R}^\times$ et $b \in \mathbf{R}$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, muni de l'opération de composition, est un groupe (il s'appelle *le groupe affine de* $\mathbf{R}$).

   *Solution.* On a que $a_1(a_2 x + b_2) + b_1 = a_1 a_2 x + a_1 b_2 + b_1$, i.e.,

$$f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} = f_{a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1} \tag{1}$$

   pour tout $a \in \mathbf{R}^\times$, $b \in \mathbf{R}$. Ceci montre que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ est clos par composition et c'est un groupe avec identité $f_{1,0}$ et inverse $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1}, -a^{-1}b}$. □

   (b) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbf{R} \rtimes_\phi \mathbf{R}^\times$, où $\mathbf{R}$ est le groupe additif et $\mathbf{R}^\times$ est le groupe multiplicatif du corps des réels. Quelle est l'action $\mathbf{R}^\times \curvearrowright^\phi \mathbf{R}$ qui définit ce produit semi-direct ?

   *Solution.* La loi du produit semi-direct $\mathbf{R} \rtimes_\phi \mathbf{R}^\times$ est donnée par : $(b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1 + \phi(a_1)(b_2), a_1 a_2)$. En comparant avec (1), on voit que si l'on définit $\phi(a)(b) = ab$, l'application $\mathbf{R} \rtimes_\phi \mathbf{R}^\times \to \mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, $(b, a) \mapsto f_{a,b}$ est un isomorphisme de groupes. □

   (c) Montrer que l'action naturelle $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}) \curvearrowright \mathbf{R}$, définie par $f_{a,b} \cdot x = f_{a,b}(x)$ pour $f_{a,b} \in \mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$, est doublement transitive.

   *Solution.* On applique 6(a). Si $x, y \in \mathbf{R}$, alors $f_{1,y-x} \cdot x = y$ et l'action est donc transitive. Un calcul facile montre que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})_0 = \{f_{a,0} : a \in \mathbf{R}^\times\}$ et ce groupe agit transitivement sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ : $f_{x^{-1}y,0} \cdot x = y$. Comme tous les stabilisateurs sont conjugués, cela suffit. □