Examen (9 janvier 2025)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés.

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le barème représente le poids relatif des exercices et est donné à titre indicatif.

1. (2p.) Soit G un groupe. Montrer que l'application $\phi\colon G \to G, \phi(g) = g^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est abélien.
2. (3p.) Combien de morphismes différents $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ y a-t-il ?
3. (3p.) Soit A un groupe abélien et soit $D = \{(a,a) : a \in A\}$.
   (a) Montrer que D est un sous-groupe distingué de $A \times A$.
   (b) Montrer que $(A \times A)/D \cong A$.
4. (4p.)
   (a) Montrer que les seuls éléments de S_8 d'ordre 8 sont les 8-cycles.
   (b) Soit σ le 8-cycle $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$. Pour quels entiers n σ^n est aussi un 8-cycle ?
   (c) Trouver des représentants de toutes les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6 dans S_7. Lesquelles de ces classes sont dans le groupe alterné A_7 ?
5. (2p.) Montrer qu'un groupe G d'ordre 312 a un p-Sylow distingué pour un nombre premier p qui divise l'ordre de G.
6. (5p.) Soit A un ensemble avec $|A| \geq 2$ et soit G un groupe. L'action $G \curvearrowright A$ est dite *doublement transitive* si pour tout $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A^2$ avec $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot a_1 = a_2$ et $g \cdot b_1 = b_2$.
   (a) Montrer que l'action $G \curvearrowright A$ est doublement transitive si et seulement si elle est transitive et pour tout $a \in A$, le stabilisateur G_a agit transitivement sur $A \setminus \{a\}$.
   (b) Montrer que pour $n \geq 4$, l'action du groupe alterné $A_n \curvearrowright [n]$ est doublement transitive.
7. (5p.) On note par $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathbf{R}$, i.e., les applications $f_{a,b}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, où $f_{a,b}(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbf{R}^\times$ et $b \in \mathbf{R}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, muni de l'opération de composition, est un groupe (il s'appelle *le groupe affine de* $\mathbf{R}$).
   (b) Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbf{R} \rtimes_\phi \mathbf{R}^\times$, où $\mathbf{R}$ est le groupe additif et $\mathbf{R}^\times$ est le groupe multiplicatif du corps des réels. Quelle est l'action $\mathbf{R}^\times \curvearrowright^\phi \mathbf{R}$ qui définit ce produit semi-direct ?
   (c) Montrer que l'action naturelle $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}) \curvearrowright \mathbf{R}$, définie par $f_{a,b} \cdot x = f_{a,b}(x)$ pour $f_{a,b} \in \mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$, est doublement transitive.