

Feuilles d'exercices 1

Exercice 1. Déterminer lesquelles des opérations suivantes sont associatives et/ou commutatives :

- l'opération $*$ sur \mathbf{Z} définie par $a * b = a + b + ab$;
- l'opération $*$ sur \mathbf{Q} définie par $a * b = (a + b)/5$;
- l'opération $*$ sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ définie par $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)$;
- l'opération $*$ sur \mathbf{R} définie par $a * b = \max(a, b)$.

Exercice 2. Est-ce un groupe? Si oui, est-il abélien?

- $(\mathbf{R}, +)$, (\mathbf{R}, \cdot) .
Quid de $(\mathbf{K}, +)$ et (\mathbf{K}, \cdot) où \mathbf{K} est un corps quelconque $(\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q})$?
- (\mathbf{R}^*, \cdot) , $(\mathbf{R}^*, +)$, où $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Quid de (\mathbf{K}^*, \cdot) , $(\mathbf{K}^*, +)$ pour un corps \mathbf{K} quelconque?
- $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$, $(\mathbf{R}^{>0}, +)$.
- $(\mathbf{U}, +)$, (\mathbf{U}, \cdot) , où $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.
- (\mathbf{U}_n, \cdot) , où $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C} : z^n = 1\}$, c'est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
- $(\mathbf{Z}, +)$, (\mathbf{Z}, \cdot) , (\mathbf{Z}^*, \cdot) ?
- $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \cdot)$.
- $(\mathbf{R}, *)$ avec l'opération $a * b = \max(a, b)$.
- Notons par $M(n, \mathbf{R})$, l'ensemble des matrices $n \times n$ à coordonnées réelles. Muni de l'addition de matrices, est-ce un groupe? Et muni de la multiplication?
- Notons par $GL(n, \mathbf{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coordonnées réelles. Muni de l'addition de matrices, est-ce un groupe? Et muni de la multiplication?

Dans la suite, sauf mention contraire explicite, nous utiliserons toujours la notation multiplicative.

Exercice 3. Soient G_1 et G_2 deux groupes.

1. Montrer que l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi de composition

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$$

est un groupe. On l'appelle le *produit direct* des groupes G_1 et G_2 .

2. Montrer que le produit direct $G_1 \times G_2$ est abélien si et seulement si les groupes G_1 et G_2 le sont.

Exercice 4. Montrer qu'un ensemble à un seul élément $\{e\}$ admet une unique loi de groupe. Montrer que ce groupe est abélien et que e est nécessairement le neutre de ce groupe.

D'ailleurs, un ensemble vide peut-il être muni d'une loi de groupe?

Exercice 5. 1. Dresser la liste des tables de multiplication possibles pour un groupe à deux éléments

$\{e, x\}$ (où e sera le neutre, et $x \neq e$).

2. Pareil, pour un groupe à trois éléments $\{e, x, y\}$.

3. Et pour quatre éléments?

Exercice 6 (Loi associative généralisée). Soit G un groupe et soient $x_1, \dots, x_k \in G$. Montrer que dans l'expression

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$$

l'ordre dans lequel on fait les multiplications n'est pas important et le résultat est toujours le même. (*Indication* : induction sur k .)

Exercice 7. Soit G un groupe. Montrer que pour tout $x, y \in G$:

$$e^{-1} = e \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

Énoncer les identités analogues en notation additive. A-t-on besoin de les démontrer elles aussi?

Exercice 8. Soit G un groupe et $x, y, z \in G$. Alors :

$$x = y \iff zx = zy \iff xz = yz \iff x^{-1} = y^{-1}.$$

En déduire que les applications suivantes sont des bijections de G avec lui-même :

- La *translation à gauche* par $z : x \mapsto zx$.
- La *translation à droite* par $z : x \mapsto xz$.
- L'inverse : $x \mapsto x^{-1}$.

Exercice 9. Soit G un groupe.

On rappelle que pour $x \in G$ et $n \in \mathbf{N}$, on définit x^n par récurrence : $x^0 = e$ et $x^{n+1} = x^n x$. Puisque x^{-1} est déjà défini (c'est l'inverse!), nous définissons pour $n \geq 2$: $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. Ceci définit x^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Montrer que pour tout $x \in G$ et $n, m \in \mathbf{Z}$:

$$x^{-n} = (x^n)^{-1}, \quad x^{m+n} = x^m x^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n.$$

Attention : pour certaines identités il y a plusieurs cas à considérer, selon si m, n (et $m+n$) sont positifs, négatifs, ou nuls.

Exercice 10. Soit $(G, +)$ un groupe en notation additive.

Définir nx pour chaque $x \in G$ et $n \in \mathbf{Z}$, par analogie avec la définition de x^n en notation multiplicative (attention : $(-1)x$ n'est pas encore défini...) Traduire également les identités de l'exercice précédent à la notation additive. A-t-on besoin de les démontrer elles aussi?

Exercice 11. Montrer qu'un groupe G dont tous les éléments x vérifient $x^2 = e$ est abélien.

Exercice 12. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $x \in G$, $x^N = e$.

Exercice 13. Soit G le groupe $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Calculer les ordres de tous les éléments de G .

Exercice 14. Soit G un groupe, $x \in G$, et $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit $m = \text{ord}(x)$ et supposons que $m < \infty$. Montrer que $x^n = e \iff m \mid n$.
2. Montrer que $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})$.
3. Si $\text{ord}(x) = \infty$, alors $\text{ord}(x^n) = \infty$.
4. Si $\text{ord}(x) = m < \infty$, alors $\text{ord}(x^n) = m / \text{pgcd}(m, n) = \text{ppcm}(m, n) / n$.

Exercice 15. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $\varphi(n)$ le nombre des entiers $0 \leq m < n$ qui sont premiers avec n . Ceci définit une fonction $\varphi: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ appelée l'indicatrice d'Euler.

On fixe $n \in \mathbf{N}^*$, et on se rappelle que $G = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est un groupe additif.

1. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que l'ordre de tout membre de G est un diviseur de n (c'est un cas particulier d'un théorème bien plus général).
2. Montrer que G possède exactement $\varphi(n)$ membres d'ordre n – lesquels?
3. Plus généralement, si $d \mid n$, montrer que G possède exactement $\varphi(d)$ membres d'ordre d – lesquels?
4. En déduire l'identité suivante :

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

Exercice 16. Montrer que si X est fini alors $|S_X| = |X|!$ (factorielle de $|X|$). En particulier, $|S_n| = n!$

Ceci est valable aussi lorsque X est vide, ou lorsque $n = 0$, avec la convention que $0! = 1$ (c'est l'unique valeur possible, pour que l'identité $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ soit valable aussi pour $n = 0$).

Exercice 17. Soit X un ensemble.

1. Montrer que la composition de deux permutations de X est encore une permutation de X .
2. Montrer que la composition de permutations est associative (pour tout dire, c'est vrai pour n'importe quel composition d'applications, dès lors qu'elle est bien définie!)
3. Montrer que l'application identité id_X est neutre (à gauche, ou des deux côtés, comme il vous plaît) pour la composition de permutations.
4. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_X$ il existe une permutation $\sigma' \in S_X$ qui est son inverse pour la loi de composition (à gauche ou des deux côtés, encore).
5. Montrer que S_X , muni de la loi de composition, est un groupe.

Exercice 18. Un cycle $\sigma = (x_1 x_2 \dots x_m)$ est toujours une permutation, et on a $\sigma^k(x_i) = x_j$ si et seulement si $j \equiv i + k \pmod{m}$.

Exercice 19. Soit $\sigma \in S_X$. Alors

1. $\text{supp}(\sigma^n) \subseteq \text{supp}(\sigma)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
2. $\text{supp}(\sigma) = \text{supp}(\sigma^{-1})$.
3. $\sigma = e$ si et seulement si $\text{supp}(\sigma)$ est vide.
4. Si $x \in \text{supp}(\sigma)$ alors $\sigma(x) \in \text{supp}(\sigma)$, d'où $\sigma^n(x) \in \text{supp}(\sigma)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (voire $n \in \mathbf{Z}$).
5. Le cardinal de $\text{supp}(\sigma)$ n'est jamais égal à un.

Exercice 20. 1. Calculer la décomposition en cycles et les ordres de tous les éléments de S_3 .

2. Soient σ et τ les permutations suivantes dans S_{15} :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 2 & 15 & 14 & 10 & 6 & 12 & 3 & 4 & 1 & 7 & 9 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 9 & 10 & 2 & 12 & 6 & 5 & 11 & 15 & 3 & 8 & 7 & 4 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Trouver les décompositions en cycles disjoints des permutations suivantes : $\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \sigma^2, \sigma\tau$.

3. Soit $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10) \in S_{10}$. Calculer σ^{100} .

Exercice 21. 1. Démontrer qu'un élément de S_n est d'ordre 2 si et seulement s'il est le produit de transpositions disjointes.

2. Soit p un nombre premier. Montrer qu'un élément de S_n est d'ordre p si et seulement s'il est le produit de cycles disjoints d'ordre p . Montrer en donnant un exemple que ce n'est pas forcément le cas si p n'est pas premier.

Exercice 22. L'ordre d'un m -cycle est m . Plus généralement, si σ est le produit de k cycles disjoints de longueurs m_1, \dots, m_k , alors $\text{ord}(\sigma) = \text{ppcm}(m_1, \dots, m_k)$.

Donner un exemple où c'est faux lorsque les cycles ne sont pas disjoints (il en existe un dans S_3).

Exercice 23. Soit $G = S_n$ (ou plus généralement, $G = S_X$). Soit

$$\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k) \in G$$

un cycle, et $\tau \in G$ une permutation quelconque. Alors

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1) \tau(a_2) \dots \tau(a_k)).$$

En déduire une formule pour $\tau\sigma\tau^{-1}$ étant donnée la décomposition de σ en produit de cycles disjoints.

Exercice 24. Soit $G = S_n$ (ou plus généralement, $G = S_X$, avec X fini). À chaque $\sigma \in G$ on définit sa *structure de cycles* comme étant la liste, en ordre croissant (et avec répétition), des longueurs des cycles dans la décomposition de σ en cycles disjoints. On pourra la noter par $SC(\sigma)$, de sorte que, par exemple

$$\sigma = (2\ 5)(3\ 8\ 6)(4\ 7) \implies SC(\sigma) = (2, 2, 3).$$

1. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que $SC(\sigma) = SC(\tau\sigma\tau^{-1})$ pour tous $\sigma, \tau \in G$.

2. Montrer que pour tous $\sigma, \tau \in G$ sont équivalents :

- $SC(\sigma) = SC(\tau)$
- Il existe $\rho \in G$ tel que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$ (on dit alors que σ et τ sont *conjugués*).