Feuilles d'exercices 2

Sous-groupes

Exercice 1. Montrer que

(a) $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^{\times}, \cdot)$.

(b) $(\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.

(c) $(n\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ et de $(\mathbf{R}, +)$.

Pourquoi $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$?

Exercice 2. (a) Démontrer qu'une partie $K \subseteq \mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ si et seulement s'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $K = d\mathbf{Z}$. De surcroît, d est unique.

(b) Soit $a, b \in \mathbf{N}$. Vérifier que la partie

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \{ka + \ell b : k, \ell \in \mathbf{Z}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$. Soit $c, d \in \mathbf{N}$ tels que

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = c\mathbf{Z}, \qquad a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}.$$

Que peut-on dire de c et de d ?

Exercice 3. (a) D'après le théorème de Lagrange, quels sont les ordres possibles des sous-groupes de S_3 ?

(b) Dresser la liste de tous les sous-groupes de S_3.

(c) Montrer que ceci est une sous-groupe de S_4 :

$$H = \big\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\big\}.$$

Exercice 4. Soit $G = \langle x \rangle$ un groupe cyclique d'ordre m. Dresser la liste des générateurs de G.

Exercice 5. (a) Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ est un produit de transpositions de la forme $(i\ \ j)$, avec $i < j$ dans $\{1, \ldots, n\}$.

(b) Soit $c = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_p)$ un p-cycle. Montrer que $c = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\cdots(i_{p-1}\ i_p)$.

(c) Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant $i < j-1$, on a $(i\ \ j) = (j-1\ \ j)(i\ \ j-1)(j-1\ \ j)$. En déduire que le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i\ \ i+1)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(d) Montrer que S_n est engendré par deux éléments : le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$.

Exercice 6. On rappelle qu'on a défini le groupe diédral D_{2n} comme le sous-groupe de S_n qui préserve la relation R_n donnée par

$$i\ R_n\ j \iff |i-j| = 1 \text{ ou } (i = n \text{ et } j = 1) \text{ ou } (i = 1 \text{ et } j = n).$$

Le groupe D_{2n} est engendré par la rotation $r = (1\ 2 \cdots n)$ et la symétrie axiale $s = (2\ \ n)(3\ \ n-1)\cdots$; r est d'ordre n et s est d'ordre 2. Enfin

$$D_{2n} = \{s^i r^j : i = 0, 1;\ j = 0, \ldots, n-1\}.$$

(a) Montrer la relation $rs = sr^{-1}$.

(b) Montrer que tout élément qui n'est pas une rotation (puissance de r) est d'ordre 2. En conclure que D_{2n} est engendré par deux éléments : s et sr, tous les deux d'ordre 2.

Exercice 7. Soit G le groupe de symétries d'un cube. Montrer que $|G| = 48$ et que G n'est pas abélien.

Exercice 8. On a vu en cours que les groupes $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$ sont isomorphes. Montrer que :

(a) $(\mathbf{R}, +) \ncong (\mathbf{R}^*, \times)$.

(b) $(\mathbf{C}, +) \ncong (\mathbf{C}^*, \times)$.

(c) $(\mathbf{Q}, +) \ncong (\mathbf{Q}^*, \times)$.

(d) $(\mathbf{R}^*, \times) \cong (\mathbf{R}^{>0}, \times) \times \mathbf{U}_2$.

Exercice 9. Soit G un groupe cyclique d'ordre n (fini).

(a) Montrer qu'il admet un unique sous-groupe d'ordre d pour chaque $d \mid n$.

(b) Montrer qu'il admet un unique sous-groupe d'indice d pour chaque $d \mid n$.

Exercice 10. Soit G un groupe cyclique infini. Montrer qu'il admet un unique sous-groupe d'indice d pour chaque $d \in \mathbf{N}^\star$, ainsi qu'un unique sous-groupe d'indice infini.

Exercice 11. Soit G un groupe fini, d'ordre n. Supposons que pour chaque d, G possède au plus d membres dont l'ordre divise d. Montrer que G est cyclique.

Pour cela, vous pouvez suivre les étapes suivantes :

(a) Soit $x \in G$, disons $\mathrm{ord}(x) = d$. Montrer que

$$\langle x \rangle = \{y \in G : \mathrm{ord}(y) \mid d\}.$$

(b) Pour chaque d, soit

$$\alpha(d) = |\{x \in G : \mathrm{ord}(x) = d\}|.$$

Montrer que si $\alpha(d) > 0$ alors $d \mid n$ et $\alpha(d) = \varphi(d)$, où φ est lindicatrice d'Euler que nous avons étudiée dans la fiche précédente.

(c) Conclure, en comparant les deux sommes $\sum_{d|n} \alpha(d)$ et $\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Exercice 12. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que si K est un corps (commutatif!) et si $G \leq K^\times$ est un sous-groupe fini, alors G est cyclique.

Exercice 13. Montrer que pour p premier, $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^\times, \cdot) \cong \big(\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}, +\big)$.

Exercice 14. La relation $H \leq G$ est un ordre partiel sur les groupes. Autrement dit, cette relation est :

- *Réflexive :* $G \leq G$
- *Antisymétrique :* $H \leq G$ et $G \leq H$ implique $G = H$ (*en tant que groupes!*)
- *Transitive :* Si $K \leq H$ et $H \leq G$ alors $K \leq G$

Exercice 15. Soit G un groupe et $H, K \leq G$ deux sous-groupes.

(a) Rappeler pourquoi $H \cap K \leq G$.

(b) Montrer que $HK \leq G$ si et seulement si $HK = KH$.

(c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K \leq G$.
Indication : si $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$, que peut-on dire de xy?

Exercice 16. Trouver deux sous-groupes de S_3 dont la réunion n'est pas un sous-groupe.

Exercice 17. Soit G un groupe et $x \in G$.

(a) Montrer que $x \in Z(G)$ si et seulement si $C_G(x) = G$.

(b) Montrer que G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.

Exercice 18. Soit G un groupe, $H \leq G$ et $K = C_G(H)$. Montrer que $H \leq C_G(K)$.

Exercice 19. Soit G un groupe non trivial et $x \in G$. Montrer que $C_G(x)$, le centralisateur de x dans G, n'est jamais trivial.

Exercice 20. Soit $G = S_3$. Calculer $C_G(\sigma)$ pour chaque $\sigma \in G$, ainsi que $Z(G)$.

Pouvez-vous calculer $Z(S_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$?

Exercice 21. Soit G un groupe, $A \subseteq G$ une partie, et $H \leq G$ un sous-groupe.

(a) Montrer que le normalisateur $N_G(A)$ est un sous-groupe de G.

(b) Montrer que $H \leq N_G(H)$.

Exercice 22. Montrer que dans un quelconque groupe G : $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$, et c'est l'unique sous-groupe de G qui est un groupe trivial. C'est donc *le sous-groupe trivial* de G.

Exercice 23. Soit G un groupe.

(a) Pour deux parties $A, B \subseteq G$, on pose

$$AB = \{xy : x \in A,\ y \in B\} \subseteq G$$

Montrer que pour $A, B, C \subseteq G$:

$$A(BC) = (AB)C$$

(b) Pour $A \subseteq G$ on pose

$$A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}.$$

Montrer que pour $A, B \subseteq G$:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(c) Pour $A \subseteq G$ on pose, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$:

$$A^0 = \{e\}, \qquad A^{n+1} = A^n A.$$

Montrer que pour tout $n, m \in \mathbf{N}$:

$$A^1 = A, \qquad A^{n+m} = A^n A^m, \qquad (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}.$$

(d) Soit maintenant $S \subseteq G$. Montrer que $(S \cup S^{-1})^{-1} = S \cup S^{-1}$. En déduire que

$$H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (S \cup S^{-1})^n$$

est un sous-groupe de G.

(e) Montrer que $H = \langle S \rangle$. Autrement dit, montrer que c'est le plus petit parmi les sous-groupes de G qui contiennent S.

Autrement dit, $x \in \langle S \rangle$ si et seulement si on peut exprimer x comme produit d'éléments pris dans S ou dans S^{-1}, où on considère e comme étant un tel produit, celui de zéro éléments. Un peu informellement, on exprimera ça sous la forme

$$x = s_1^{\pm 1} s_2^{\pm 1} \cdots s_n^{\pm 1}, \qquad s_i \in S,\ n \in \mathbf{N}.$$

Exercice 24. (a) Quelles sont les classes à gauche de $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ modulo $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$? À droite ?

(b) Quelles sont les classes de $(\mathbf{Z}, +)$ modulo $(n\mathbf{Z}, +)$?

Exercice 25. Soit $H = \{e, (1\ 2)\} \subseteq S_3$.

(a) Montrer que $H \leq S_3$.

(b) Montrer que $S_3 / H \neq H \setminus S_3$.

(c) Montrer que $|S_3 / H| = |H \setminus S_3|$ en les calculant explicitement.