Feuille d'exercices 4

Actions

Exercice 1. Une action $G \curvearrowright X$ est dite *fidèle* si pour tout $g \neq e$ il existe $x \in X$ tel que $g \cdot x \neq x$. Sont équivalents :

(a) L'action est fidèle.

(b) $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.

(c) Le morphisme $G \to S_X$ associé à l'action est injectif.

Exercice 2. Une action $G \curvearrowright X$ est dite *libre* si pour tout $g \neq e$ et tout $x \in X$: $g \cdot x \neq x$. Sont équivalents :

(a) L'action est libre.

(b) $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$.

(c) Pour tout $x, y \in X$ il existe au plus un g tel que $g \cdot x = y$.

Montrer que si l'action est libre, alors $|G| = |O|$ pour toute orbite O. Montrer que toute action libre est fidèle.

Exercice 3. Soit G un groupe et $H \leq G$.

- L'action $G \curvearrowright G/H$ est transitive, et $G_H = H$.
- Elle est libre si et seulement si $H = \{e\}$.
- Fidèle si et seulement si $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$.

Exercice 4. Soit $H \trianglelefteq G$. Sous quelle condition l'action $G \curvearrowright G/H$ est-elle fidèle ?

Exercice 5. L'action naturelle $S_n \curvearrowright \{1, \ldots, n\}$ est transitive et fidèle, mais non libre (dès que $n \geq 3$).

Exercice 6. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive et fidèle et soit $a \in A$.

(a) Montrer que $\bigcap_{g \in G} gG_a g^{-1} = \{e\}$.

(b) Montrer que si G est abélien, alors $|G| = |A|$.

Exercice 7. (a) Considérons l'action naturelle $S_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ (l'action de S_n sur les parties de $[n]$ induite par son action sur $[n]$). Quelles sont ses orbites ?

(b) La même question pour l'action $A_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ pour $n \geq 3$.

Exercice 8. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini. Un *bloc* est une partie non vide $B \subseteq A$ telle que pour tout $g \in G$, $g \cdot B = B$ ou $g \cdot B \cap B = \emptyset$.

(a) Montrer que si $B \subseteq A$ est un bloc contenant l'élément a alors $G_B \coloneqq \{g \in G : g \cdot B = B\}$ est un sous-groupe de G qui contient G_a.

(b) Montrer que $\{g \cdot B : g \in G\}$ est une partition de A.

(c) Un groupe transitif est dit *primitif* si les seuls blocs dans A sont les blocs triviaux : les singletons et A. Montrer que l'action $S_n \curvearrowright [n]$ est primitive. Montrer que l'action $D_8 \curvearrowright [4]$ ne l'est pas. Et l'action $D_{10} \curvearrowright [5]$?

(d) Montrer que l'action $G \curvearrowright A$ est primitive ssi pour tout $a \in A$ le stabilisateur G_a est un *sous-groupe maximal* de G, i.e., pour tout sous-groupe H tel que $G_a \leq H \leq G$, $H = G_a$ ou $H = G$.

Exercice 9. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et soit $H \triangleleft G$. Soient $O_1, O_2, \ldots, O_r$ les orbites de H sur A.

(a) Montrer que l'ensemble $\{O_1, \ldots, O_r\}$ est invariant par l'action $G \curvearrowright \mathscr{P}(A)$, i.e., G agit sur cet ensemble.

(b) Montrer que si $a \in O_1$, alors $|O_1| = [H : H \cap G_a]$ et $r = [H : HG_a]$.

Exercice 10. (a) Montrer qu'il existe deux permutations dans S_8 qui engendrent un sous-groupe isomorphe à Q_8. Explicitez une paire de telles permutations.

(b) Montrer que Q_8 n'est isomorphe à aucun sous-groupe de S_n pour $n \leq 7$. (*Indication* : Montrer que si Q_8 agit sur un ensemble de cardinal ≤ 7, le stabilisateur de tout point contient le sous-groupe $\langle -1 \rangle$.)

Exercice 11. Soit G un groupe fini et soit le morphisme $\pi\colon G \to S_G$ donné par l'action $G \curvearrowright G$ par multiplication à gauche.

(a) Montrer que si $x \in G$ est d'ordre n et $|G| = mn$, alors $\pi(x)$ est le produit de m n-cycles.

(b) Montrer que si l'image de π contient une permutation impaire, alors G admet un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 12. Montrer que si $|G| = 2k$ avec k impair, alors G contient un sous-groupe d'indice 2. (*Indication :* Utiliser le théorème de Cauchy et l'exercice précédent.)

Exercice 13. Soit G un groupe fini, et p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p est distingué. (*Indication :* Étudier l'action $H \curvearrowright G/H$ et les cardinaux de ses orbites.)

Exercice 14. On fait agir un groupe d'ordre 143 sur une ensemble de cardinal 108. Montrer qu'il existe un point fixe pour cette action (c'est à dire, au moins un $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$).

Exercice 15. Quelles sont les classes de conjugaison dans les groupes suivants : S_3, A_4, D_8, Q_8 ?

Exercice 16. Soit G un groupe non abélien d'ordre 15.

(a) Montrer que $|Z(G)| = 1$;

(b) Montrer qu'il existe au plus une possibilité pour l'équation des classes de G.

Exercice 17. Soit $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$. Pour chacun des cas suivants trouver un élément explicite $\tau \in S_5$ tel que

(a) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$;

(b) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Exercice 18. Trouver des représentants pour toutes les classes de conjugaison de S_8 d'éléments d'ordre 4.

Exercice 19. Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

Exercice 20. Montrer que si n est impair, alors l'ensemble de tous les n-cycles consiste en 2 classes de conjugaison du même cardinal dans A_n.

Exercice 21. Montrer que si G est un groupe d'ordre impair, alors pour tout $x \in G$ différent de l'identité, x et x^{-1} ne sont pas conjugués.

Exercice 22. Soit $G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{C}, ac \neq 0 \right\}.$$

Montrer que tout élément de G est conjugué à un élément du sous-groupe H et donc $G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

Exercice 23. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et $|A| > 1$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$. (On rappelle que $\mathrm{Fix}(g) := \{a \in A : g \cdot a = a\}$.)

Exercice 24. Soit G un groupe fini, et $H \leq G$. Soit

$$X = \{gHg^{-1} : g \in G\}$$

l'ensemble des conjugués de H.

(a) Montrer que $|H| \mid |N_G(H)|$.

(b) En déduire que $|X| \mid [G : H]$.

Exercice 25. Le but de cet exercice est de calculer l'ordre du groupe $\mathrm{GL}(n, F)$ où F est un corps fini d'ordre q. Soit $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in F^n$ et considérons l'action $\mathrm{GL}(n, F) \curvearrowright F^n \times F^n$ donnée par

$$A \cdot (x, y) = (Ax, A^t y), \quad A \in \mathrm{GL}(n, F), x, y, \in F^n.$$

(a) Déterminer le stabilisateur de (e_1, e_1) pour cette action.

(b) Déterminer le cardinal de l'orbite de (e_1, e_1).

(c) Par un argument de récurrence, en conclure que

$$|\mathrm{GL}(n, F)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

(d) Calculer l'ordre de $\mathrm{SL}(n, F)$.

Exercice 26 (Théorème de Cauchy)**.** Soient G un groupe fini et $p \in \mathbf{N}$ un nombre premier divisant l'ordre de G. On note $\sigma = (1 \cdots p) \in S_p$ un cycle d'ordre p et on pose

$$X = \{(g_1, ..., g_p) \in G^p : g_1 \cdots g_p = e\}.$$

On considère l'application

$$f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times X \to G^p, \quad (\bar{k}, (g_1, ..., g_p)) \mapsto (g_{\sigma^k(1)}, ..., g_{\sigma^k(p)}).$$

(a) Montrer que f définit une action de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur X.

(b) Montrer que G admet un élément d'ordre p.

Exercice 27 (La formule de Burnside)**.** On suppose que G est un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X.

(a) Montrer que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Ces deux sommes représentent deux manières de compter les membres d'un même ensemble, lequel ?

(b) Montrer la formule de Burnside : le nombre d'orbites de l'action est donné par

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 28. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et p un entier premier.

(a) On considère l'ensemble des bracelets constitués de p perles, chacune pouvant être coloriée de l'une des n couleurs. Deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet). Combien existe-t-il de bracelets distincts ?

(b) Même question, mais maintenant deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet) ou réflexion (on l'enlève, on le retourne, on le remet).

Exercice 29. Comme l'exercice précédent, mais on ne suppose plus que le nombre de perles est premier. On pourra se contenter du cas à six perles.