Feuille d'exercices 5

Sylow, produits semi-directs, classification

Dans les quatre premiers exercices nous fixons deux nombres premiers $p < q$, et nous cherchons à classifier les groupes d'ordre pq.

p désigne un nombre premier dans toute la fiche.

Exercice 1. Soit G un groupe d'ordre pq.

(a) Montrer qu'il existe $x, y \in G$ tels que $\mathrm{ord}(x) = p$ et $\mathrm{ord}(y) = q$.

(b) En déduire que si G est abélien, alors il est isomorphe au groupe cyclique C_{pq}.

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre pq.

(a) Montrer que G admet un unique q-Sylow, notons-le par H. Montrer que $H \cong C_q$ et $H \trianglelefteq G$.

(b) Soit K un p-Sylow de G. Montrer $K \simeq C_p$.

(c) Montrer que G est un produit semi-direct de H et K.

(d) Soit N_p le nombre des p-Sylows distincts de G. Montrer que N_p vaut 1 ou q.

(e) En déduire que si $p \nmid q-1$, alors $N_p = 1$, $K \trianglelefteq G$, et G est un produit direct de H et K.

(f) En déduire que si $p \nmid q-1$, alors $G \simeq C_{pq}$.

Exercice 3. Soit $\alpha\colon C_p \to \mathrm{Aut}(C_q)$ un morphisme.

(a) Rappeler la définition du produit semi-direct $G = C_q \rtimes_\alpha C_p$: quels sont ses membres ? Sa loi ?

(b) Quel est l'ordre de G ? Sous quelles conditions (sur les données p, q et α) G est-il abélien ?

(c) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(C_q)$ est isomorphe à C_{q-1} (regarder les fiches précédentes).

(d) Montrer que, si $p \mid q-1$, alors il est possible de choisir α de sorte que G soit non abélien.

(e) Déduire que deux produits semi-directs $C_q \rtimes_\alpha C_p$ et $C_q \rtimes_\beta C_p$ *non abéliens* sont forcément isomorphes.

Exercice 4. Déduire des exercices précédents le Théorème de classification suivant :

Soit $p < q$ deux nombres premiers.

- Si $p \nmid q-1$, alors à isomorphisme près il existe un unique groupe d'ordre pq, à savoir, le groupe cyclique C_{pq}.
- Si $p \mid q-1$ lors à isomorphisme près il existe exactement deux groupes d'ordre pq, à savoir, le groupe cyclique C_{pq} et l'unique produit semi-direct non abélien $C_q \rtimes C_p$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe A_n est simple pour tout $n \geq 5$. On rappelle le résultat du cours que le groupe A_5 est simple. Soit $n > 5$ et soit $N \triangleleft A_n$ un sous-groupe distingué non trivial.

(a) Montrer que si $x \in N$ et $y \in A_n$, alors le commutateur $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ est un élément de N.

(b) Soit $x \in N$, $x \neq e$. Montrer qu'il existe $y \in A_n$ tel que $[x, y]$ est non trivial et son support contient au plus 5 points.

(c) Soit $S \subseteq [n]$ tel que $|S| = 5$ et $S \supseteq \mathrm{supp}[x, y]$. On considère A_S comme un sous-groupe de A_n en étendant chaque permutation de A_S par l'identité en dehors de S. Montrer que $A_S \leq N$. En particulier N contient un 3-cycle.

(d) Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n et en déduire que $N = A_n$.

Exercice 6. (a) Soit G un groupe d'ordre p^n. Montrer que pour tout k, $0 \leq k \leq n$, G admet un sous-groupe distingué N_k d'ordre p^k.

(b) En déduire que si G est un groupe fini et $p^k \mid |G|$, alors G admet un sous-groupe d'ordre p^k.

Exercice 7. Dans cet exercice on va calculer le groupe $\mathrm{Aut}(D_8)$.

(a) Soient r et s les générateurs usuels de D_8. Montrer que $|\mathrm{Aut}(D_8) \cdot r| \leq 2$ et que $|\mathrm{Aut}(D_8) \cdot s| \leq 4$. En déduire que $|\mathrm{Aut}(D_8)| \leq 8$.

(b) En utilisant le fait que $D_8 \lhd D_{16}$, montrer que $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$.

Exercice 8. Montrer que tout p-Sylow de D_{2n} est distingué et cyclique pour tout p premier impair.

Exercice 9. (a) Trouver tous les 3-Sylows de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$.

(b) Montrer que le groupe engendré par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est l'unique 2-Sylow de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$.

Exercice 10. (a) Calculer le nombre de sous-espaces de dimension 1 de $\mathbf{F}_p^n$.

(b) Montrer que

$$Z(\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) En considérant l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)$ sur l'ensemble des sous-espaces de $\mathbf{F}_3^2$ de dimension 1, montrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3) / Z(\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_3)) \cong A_4$.

Exercice 11. Montrer que G n'est pas simple si l'ordre de G est :

(a) $6545 = 5 \times 7 \times 11 \times 17$;

(b) $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$;

(c) $2907 = 3^2 \times 17 \times 19$.

Exercice 12. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que si un 3-Sylow de G est distingué, alors G est abélien.

Exercice 13. Montrer que si A et B sont deux sous-groupes distingués de G tels que G/A et G/B sont abéliens, alors $G/A \cap B$ est abélien.

Exercice 14. Soit K un groupe cyclique, soit H un groupe arbitraire et soient ϕ_1, ϕ_2 deux morphismes $K \to \mathrm{Aut}(H)$. Si K est infini, supposons en plus que ϕ_1 et ϕ_2 sont injectifs. Montrer que si $\phi_1(K)$ et $\phi_2(K)$ sont conjugués dans $\mathrm{Aut}(H)$, alors $H \rtimes_{\phi_1} K \cong H \rtimes_{\phi_2} K$.

Exercice 15 (Classification des groupes d'ordre 30)**.** Soit G un groupe d'ordre 30. On note par n_p le nombre de p-Sylows de G.

(a) Montrer que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$. (*Indication* : Sinon $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$ et on peut arriver à une contradiction en comptant les éléments d'ordre 3 et d'ordre 5.)

(b) En déduire que G admet un sous-groupe H d'ordre 15 qui est distingué et cyclique.

(c) Montrer que G admet un sous-groupe K d'ordre 2 et en déduire que $G \cong H \rtimes_\phi K$.

(d) Montrer que $\mathrm{Aut}(C_{15}) \cong (\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times \cong C_4 \times C_2$.

(e) En considérant tous les morphismes $C_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})$, montrer que G est isomorphe à l'un des quatre groupes suivants : C_{30}, $C_3 \times D_{10}$, $C_5 \times D_6$, D_{30}.

(f) Montrer que dans la liste ci-dessus tous les groupes sont distincts.

Exercice 16. (a) Construire un groupe non abélien d'ordre 75.

(b) Classifier tous les groupes d'ordre 75 (il y en a 3).

Exercice 17. Classifier tous les groupes d'ordre 28 (il y en a 4).

Exercice 18 (Preuve alternative du théorème de Sylow)**.** Dans cet exercice on va démontrer que tout groupe fini admet des sous-groupes de Sylow.

(a) Montrer que si $H \leq G$ et si P est un p-Sylow de G, alors il existe $x \in G$ tel que $xPx^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H. (*Indication :* Considérer l'action $H \curvearrowright G/P$.)

(b) Soit

$$P = \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p) : a_{ii} = 1 \text{ pour tout } i \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ pour tous } i > j\}$$

le sous-groupe de matrices triangulaires supérieures strictes. Montrer que P est un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p)$.

(c) Montrer que tout groupe fini G se plonge dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p)$ pour un n bien choisi.

(d) Conclure que tout groupe fini admet un p-Sylow.

Exercice 19. Soit G un groupe. La *série centrale ascendante* de G est définie par récurrence comme suit : $Z_0(G) = \{e\}$, $Z_{i+1}(G) = \pi_i^{-1}(Z(G/Z_i(G)))$ où $\pi_i \colon G \to G/Z_i(G)$ est le morphisme quotient. Le groupe G est appelé *nilpotent* s'il existe n tel que $G = Z_n(G)$. Par exemple tout groupe abélien G est nilpotent car $G = Z_1(G)$.

(a) Vérifier que $Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots$ est une suite ascendante de sous-groupes distingués de G.

(b) Montrer que tout p-groupe est nilpotent.

(c) Montrer que le groupe de Heisenberg

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ 0 & 1 & \mathbf{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est nilpotent.

(d) Montrer que si G_1 et G_2 sont nilpotents, alors $G_1 \times G_2$ l'est aussi.

(e) Montrer qu'un groupe fini est nilpotent ssi il est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow, i.e., tous ses sous-groupes de Sylow sont distingués. (*Indication :* Pour le sens difficile, on peut commencer par démontrer que si $H < G$, alors $H < N_G(H)$.)

(f) Montrer qu'un groupe fini G est nilpotent ssi pour tous $x, y \in G$ avec $\mathrm{pgcd}(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y) = 1$, on a que $xy = yx$.

(g) Montrer que D_{2n} est nilpotent ssi n est une puissance de 2.