

## Feuille 2

**Exercice 1** (Axiome du choix). Une *fonction de choix* sur un ensemble  $X$  est une application  $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$  telle que pour toute partie  $A \subseteq X$  non vide, on ait  $\varphi(A) \in A$ .

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour toute famille  $(X_i)_{i \in I}$  d'ensembles non vides, le produit  $\prod_{i \in I} X_i$  de ces ensembles est non vide.
2. Tout ensemble  $X$  admet une fonction de choix.
3. Pour tous les ensembles  $X, Y$  et toute application surjective  $g: X \rightarrow Y$ , il existe une application  $h: Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ h$  soit l'application identique de  $Y$  dans  $Y$ .

**Exercice 2.** On rappelle qu'un ensemble est fini s'il est équipotent à un ordinal fini (c.à.d. à un entier  $n < \omega$ ) et qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à  $\omega$ .

- L'axiome des choix dépendants (ACD) est l'énoncé suivant : pour tout ensemble  $X$  et toute relation binaire sur  $X$  tels que pour tout  $x \in X$  il existe  $y \in X$  vérifiant  $xRy$ , il existe alors une suite  $(x_n)_{n < \omega}$  de  $X$  telle que  $x_n R x_{n+1}$  pour tout  $n$ .
- L'axiome du choix dénombrable (ACden) est l'énoncé : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

1. Montrer que (AC) implique (ACD).
2. Montrer que (ACD) implique (ACden).

**Exercice 3.**

1. Montrer que tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable.
2. Montrer que l'union d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

**Exercice 4.** Un ensemble  $X$  est dit *Dedekind-fini* si toute injection de  $X$  dans  $X$  est surjective.

1. Montrer que tout ensemble fini est Dedekind-fini.
2. Montrer qu'un ensemble est Dedekind-infini si et seulement s'il contient un sous-ensemble dénombrable.
3. Montrer qu'un ensemble infini est Dedekind-infini.
4. Montrer la question précédente en utilisant (ACden) mais pas (ACD).

**Exercice 5.** Donner une démonstration des deux résultats classiques d'analyse suivants :

1. Soit  $X$  un espace métrique et  $F$  une partie de  $X$ . Alors  $F$  est fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de  $F$  a sa limite dans  $F$ .
2. Soit  $X$  un espace métrique et  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (muni de sa topologie usuelle). Alors  $f$  est continue (i.e l'image réciproque par  $f$  d'un fermé de  $\mathbb{R}$  est un fermé de  $X$ ) si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x \in X$  on a  $\lim f(x_n) = f(x)$ .