Feuille 3 - Cardinaux

Exercice 1. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \aleph_\alpha$.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour trois cardinaux κ, λ, μ on a $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$ et $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls (κ_i) (avec I infini) telle que $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$.
3. Trouver deux suites de cardinaux κ_i et λ_i tels que pour tout i on ait $\kappa_i < \lambda_i$ mais $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$.
4. Calculer $\prod_{n<\omega} n$ (comme produit de *cardinaux*).
5. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
6. Montrer que $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Exercice 3. Soit α un ordinal limite. La *cofinalité* de α est définie comme étant le plus petit cardinal d'une partie non majorée de α.

1. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.
2. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f\colon \gamma \to \alpha$ strictement croissante et dont l'image ne soit pas (strictement) majorée.
   (En particulier, il existe une suite strictement croissante $(\alpha_i)_{i<\mathrm{cof}(\alpha)}$ d'ordinaux tel que $\alpha = \sup\{\alpha_i \colon i < \mathrm{cof}(\alpha)\}$.)
3. Montrer que $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

Exercice 4. Soit κ un cardinal infini. On dit que κ est *régulier* s'il est égal à sa cofinalité, autrement dit, si toute partie $X \subseteq \kappa$ de cardinal $< \kappa$ satisfait $\sup(X) < \kappa$.

1. Donner la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$ et $\aleph_{\omega^2+\omega+1}$.
2. Si κ est un cardinal limite, montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\kappa_i)_{i<\mathrm{cof}(\kappa)}$ de cardinaux telle que $\kappa = \sup\{\kappa_i \colon i < \mathrm{cof}(\kappa)\}$.
3. Montrer que toute partie de κ de cardinal κ est cofinale dans κ.
4. Montrer que $\mathrm{cof}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel que κ soit la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
5. Montrer que κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
6. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal infini non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$.
7. Soit $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f\colon \kappa \to \lambda$ est constante sur un segment final de κ.

Exercice 5. On rappelle que *l'hypothèse généralisée du continu* (HGC) est l'énoncé : « Pour tout cardinal infini κ, $2^\kappa = \kappa^+$.

1. Montrer que pour tous cardinaux infinis κ et λ, on a $\kappa^\lambda \leq 2^{\max(\kappa,\lambda)}$.
2. Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$ (on distinguera les cas $\lambda \geq \kappa^+$ et $\lambda \leq \kappa$).
3. Soient n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \max(\aleph_n, 2^\lambda)$.
4. On suppose (HGC). Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \mathrm{cof}(\kappa), \\ \kappa^+ & \text{si } \mathrm{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa, \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leq \lambda. \end{cases}$$

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $n < \omega$, on a $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n \cdot 2^{\aleph_1}$ (on pourra utiliser le fait que pour $n \geq 2$, une fonction $f : \omega_1 \to \omega_n$ n'est pas cofinale).
2. En déduire que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

Exercice 7.

1. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+.\kappa^\lambda$
2. Soit n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n.2^\lambda$.

Exercice 8. (Théorème de Goodstein). Soient $a \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. On définit l'écriture de a en base p-itérée de la manière suivante : on écrit d'abord a en base p, sous la forme $a = a_k p^k + \cdots + a_1 p + a_0$; puis on réitère le procédé sur les exposants, et ainsi de suite, de sorte á n'avoir plus que des nombres inférieurs à p à la fin. Par exemple, en base 2 itérée, 35 s'écrira $2^{2^2+1} + 2 + 1$ en base 3 itérée, 88 s'écrira $3^{3+1} + 2 \cdot 3 + 1$.

Pour $q \geq p \geq 2$, on définit la fonction $f_{p,q}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante : pour a un entier, on écrit a en base p-itérée et on remplace dans cette écriture tous les p par des q. Le nombre ainsi formé est $f_{p,q}(a)$. On définit de la même manière $f_{p,\omega}$ en remplaçant p par ω (on commencera alors l'écriture par les termes avec les plus grands exposants et on écrira les coefficients à droite des ω^α). Par exemple, $f_{3,4}(88) = 4^{4+1} + 2 \cdot 4 + 1$ et $f_{3,\omega}(88) = \omega^{\omega+1} + \omega \cdot 2 + 1$.

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on appelle *suite de Goodstein* de a la suite $(g_n(a))_{n \geq 2}$ définie par :

$$g_2(a) = a \text{ et } g_{n+1}(a) = f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1 \text{ si } g_n(a) \neq 0, \ 0 \text{ sinon.}$$

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Goodstein : pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite de Goodstein de a stationne à 0 à partir d'un certain rang.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite de Goodstein pour 5.
2. Montrer que pour tous $\omega \geq r > q > p \geq 2$, on a $f_{p,r} \circ f_{p,q} = f_{p,r}$.
3. Montrer que les fonctions $f_{p,\omega}$ sont strictement croissantes.
4. Soit $a \in \mathbb{N}$. Étudier la monotonie de la suite des $f_{p,\omega}(g_p(a))$.
5. Conclure que pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite de Goodstein pour a est nulle à partir d'un certain rang.