Feuille 4

Exercice 1.

1. Montrer que si $f : \omega_1 \to \omega_1$ est continue et croissante alors son ensemble des points fixes est un club.
2. Montrer que pour toute application $f : \omega_1 \to \omega_1$, l'ensemble $\{\alpha < \omega_1 | f(\beta) < \alpha, \forall \beta < \alpha\}$ est un club.

Exercice 2. Montrer que si $S \subseteq \omega_1$ n'est pas stationnaire alors il existe une fonction regressive $f : S \to \omega_1$ telle que l'ensemble $\{\alpha | f(\alpha) \leq \beta\}$ est borné pour tout $\beta < \omega_1$.

Exercice 3. On cherche dans cet exercice à déterminer le rang de Cantor-Bendixon de ω_1 munit de la topologie de l'ordre. [Rappel : si X est un espace topologique, on note $X^{(0)} = X$, $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, $X^{(\alpha)} = \cap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ si α est limite et on définit le rang de Cantor-Bendixson de X, $CB(X)$, comme le plus petit ordinal α tel que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$ si un tel α existe, ∞ sinon.]

1. Montrer que si $C \subseteq \omega_1$ est un club alors il en est de même de C'.
2. Montrer que pour tout $\alpha < \omega_1$, $\omega_1^{(\alpha)}$ est un club. A quel ordinal est-il isomorphe ?
3. Montrer que $CB(\omega_1) = \omega_1$.

Exercice 4. Soit $S \subseteq \omega_1$ un sous-ensemble stationnaire. Montrer que pour tout $\alpha < \omega_1$ il existe un sous-ensemble fermé A qui peut être énuméré par α et tel que $A \subseteq S$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur ω_1. On dit que $\mathcal{F}$ est *normal* s'il est clos par intersections diagonales : si $X_\alpha \in \mathcal{F}$ pour tout $\alpha < \omega_1$ alors $\Delta_{\alpha<\omega_1} X_\alpha \in \mathcal{F}$. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre normal sur ω_1 qui contient tous les segments finaux $\{\alpha | \alpha_0 < \alpha < \omega_1\}$ alors $\mathcal{F}$ contient tous les clubs.

Exercice 6. Montrer que tout sous-ensemble $S \subseteq \omega_1$ stationnaire est l'union disjointe de ω_1 sous-ensembles stationnaires.