Feuille 5 – Langage, structures et théories

Exercice 1. Montrer que toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen $\vee$, ni le quanteur $\forall$.

Exercice 2. Deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute L-structure satisfait $\forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 3. Toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi$ où les Q_i sont des quanteurs et ϕ est une formule sans quanteur.

Exercice 4. Soit K un corps commutatif.

1. Vérifier que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$ soit un corps.

Exercice 5. Soit $L = \{R\}$ le langage réduit à une relation binaire R. Montrer qu'il existe deux L-structures non isomorphes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ telles que $\mathfrak{M}$ se plonge dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ se plonge dans $\mathfrak{M}$.

Exercice 6. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne de L-structures ($\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors la réunion $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, est munie canoniquement d'une L-structure, notée $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i$, qui satisfait pour tout $i \in I$, $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$.

Exercice 7. Soit $L = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une L-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B seront dits *blancs*, les autres *noirs*) ; elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.

1. Donner des exemples de chaînes bicolores génériques dénombrables et non dénombrables.
2. Donner un exemple d'une chaîne bicolore générique tel que l'ensemble des points blancs est dénombrable et tel que l'ensemble des points noirs n'est pas dénombrable.
3. Soit B l'ensemble des points blancs d'une chaîne bicolore générique et N l'ensemble des points noirs de cette même chaîne. Montrer que $|B| \leq 2^{|N|}$ et $|N| \leq 2^{|B|}$.
4. Donner un exemple de deux chaînes bicolores génériques non ∞-équivalentes.

Exercice 8.

1. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?
2. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle infini alors tous les modèles de T sont infinis. Sont-ils tous isomorphes ?

Exercice 9. La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Même question avec la théorie des corps infinis.

Exercice 10.

1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémité. Montrer que cette théorie est complète.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies. Montrer que cette théorie est complète.
3. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies. Montrer que cette théorie est complète.

Exercice 11. On dit qu'une théorie est *κ-catégorique* si tous les modèles de T de cardinal κ sont isomorphes. Soit le langage $\mathcal{L} = \{s\}$ comprenant un symbole de fonction unaire s. Soit S l'ensemble de formules suivantes :

A_1 : $\forall x \forall y\ (sx = sy \rightarrow x = y)$;

A_2 : $\forall x \exists y\ (x = sy)$;

C_n : pour chaque entier $n > 0$ l'axiome $\forall x\ \neg(s^n x = x)$.

1. Donner un modèle de S.
2. Montrer que S n'a pas de modèles finis.
3. Soit $\mathfrak{M} = (M, s)$ un modèle de S. Pour chaque $x \in M$ soit

$$\mathrm{Orb}(x) = \{s^n(x) : n \in \mathbf{N}\} \cup \{y \in M : \exists n \in \mathbf{N}\ s^n(y) = x\}.$$

   Montrer que pour tout $x \in M$, $(\mathrm{Orb}(x), s)$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$ isomorphe à $(\mathbf{Z}, s)$ (s étant interprété dans $\mathbf{Z}$ par la fonction $x \mapsto x + 1$).
4. Montrer que S n'est pas $\aleph_0$-catégorique.
5. Montrer que S est κ-catégorique pour tout cardinal $\kappa > \aleph_0$.