Feuille 6 – Va et vient

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Montrer que deux ordres totaux, denses et sans extrémités sont ∞-équivalentes.
2. Soit $\mathcal{L}$ le langage avec un symbole $<$ de relation binaire. Vérifier si les paires suivantes de structures sont ∞-équivalents :
   - $(\mathbf{Z}, <)$ et $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}, <)$ où la deuxième structure est ordonnée lexicographiquement en utilisant les ordres usuels sur $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}$, et avec priorité sur la première coordonnée ;
   - $(A \times \mathbf{Z}, <)$ et $(B \times \mathbf{Z}, <)$ où A et B sont deux ensembles finis non vides ordonnés et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée ;
   - $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, <)$ et $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}, <)$ où l'ordre est lexicographique avec priorité sur la première coordonnée et les coordonnées sont ordonnées avec leurs ordres usuels ;
   - $(A\times\mathbf{Z}, <)$ et $(B\times\mathbf{Z}, <)$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux ordres totaux, denses, sans extrémités de bases A et B, et $<$ est l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée.
3. On fixe un corps K et on considère le langage des K-espaces vectoriels : $\mathcal{L}(K) = \{0, +, \lambda_k | k \in K\}$ où $+$ est la loi interne, 0 l'élément neutre de celle-ci, chaque λ_k est un symbole de fonction unaire décrivant la multiplication par le scalaire k. Montrer que deux K-espaces vectoriels en tant que $\mathcal{L}(K)$-structures sont ∞-équivalents si, et seulement si, ils ont même dimension ou sont de dimensions infinies.

Exercice 2.

1. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.
2. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes mais $\mathcal{M}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

Exercice 3.

1. Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$. Montrer que
   (a) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$;
   (b) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.
2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne élémentaire de L-structures ($\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Montrer que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \prec \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

Exercice 4. Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\phi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\mathcal{M} \models \phi_n(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathcal{M}$ strictement compris entre a et b.
3. Soit $\mathcal{N}$ la L-structure $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire tel que

$$(a, m) <^{\mathcal{N}} (b, n) \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } (a = b \text{ et } m < n).$$

   Soit $\mathcal{M}$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

4. On considère $\mathcal{M}'$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}) \cup ((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times 2\mathbf{Z})$. Montrer que $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$. A-t-on $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}$?

Exercice 5. Montrer que la relation d'∞-équivalence est bien une relation d'équivalence.

Exercice 6. 1. Soit K un corps algébriquement clos. Montrer que pour tout sous-corps k fini ou dénombrable de K, la clôture algébrique de k est dénombrable.

2. Soit K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique et non dénombrables. Montrer que K_1 et K_2 sont ∞-équivalents.

Exercice 7. La famille $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ des ensembles définissables est close par

1. combinaisons booléennes finies : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$, le complémentaire de A, l'union et l'intersection de A et B sont dans $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$,
2. produits cartésiens : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$, $A \times B \in \mathrm{Def}(\mathcal{M})$,
3. projections : si A est une partie définissable de M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable,
4. sections : si A est une partie définissable de M^{n+m} et si $\bar{b} \in M^m$ alors
$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : \ (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathcal{M}),$$
5. permutations des coordonnées : si A est une partie définissable de M^n et σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ alors
$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)} : \ (a_1, \ldots, a_n) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathcal{M}).$$

La famille $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ est en fait la plus petite famille de parties de $\cup_{n>0} M^n$, contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

Exercice 8. Soit $\mathcal{M}$ une sous-structure de $\mathcal{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$,
2. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}, M)$,
3. l'inclusion $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ est un plongement élémentaire.

On appelle $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ le *diagramme élémentaire* de $\mathcal{M}$.

Exercice 9. Entre quelles structures dans la liste suivante existe-t-il un plongement ? un plongement élémentaire ?
$$\langle \mathbf{Q}, <, +, 0\rangle, \quad \langle \mathbf{Q}, <, \cdot, 1\rangle, \quad \langle \mathbf{R}, <, +, 0\rangle, \quad \langle \mathbf{R}, <, \cdot, 1\rangle, \quad \langle \mathbf{R}^{+}, <, \cdot, 1\rangle$$

Exercice 10. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbf{N}, \cdot\rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 11. Montrer que l'ordre sur $\mathbf{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbf{R}, +, \cdot\rangle$.