Feuille 7 - Théorème de compacité

Exercice 1.

1. Soit T une théorie et φ un énoncé tel que $T \vdash \varphi$. Montrer qu'il existe une partie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \vdash \varphi$.
2. Montrer que si T est une théorie finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de T, on peut extraire une axiomatisation finie.

Exercice 2. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand a un modèle infini.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules $\Phi(x)$ dans le langage des groupes tel que pour tout groupe G et tout $g \in G$ g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

Exercice 4. Montrer que la classe de graphes connexes n'est pas axiomatisable en premier ordre (dans un langage qui comporte une relation binaire pour les arêtes).

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}$ un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage qui contiennent θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1 soit modèle de T_2 mais jamais des deux. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Exercice 6. Soit $\mathcal{L}$ un langage fini, et T une théorie dans le langage $\mathcal{L}$. On suppose que, dans tout modèle de T, les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que, pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 7. (Ordres discrets sans extrémités.) Soient $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. Dans ce langage, soit T la théorie qui énonce qu'elle est une relation d'ordre discret sans extrémités et qui est formé par les conséquences de ces énoncés.

1. Écrire les énoncés qui axiomatisent T.
2. Vérifier que tout ensemble de la forme $K \times \mathbf{Z}$ ordonné par l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée, où K est une chaîne dense sans extrémités et $\mathbf{Z}$ est muni de son ordre discret usuel, est modèle de T. Montrer que deux tels modèles sont ∞-équivalents.
3. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire qui est de la forme décrite dans le point précédent. Déduire que T est une théorie complète.

Exercice 8. On considère le langage $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i<\omega}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout $i < \omega$, la relation E_{i+1} partitionne chaque classe de E_i en exactement deux classes infinies.
2. Donner un modèle des énoncés ci-dessus ; on notera T la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que deux modèles riches de T sont ∞-équivalents.
4. Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ de T a une extension élémentaire riche et en déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ? κ-catégorique pour un cardinal κ ?

Exercice 9. On rappelle que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p (0 ou un nombre premier) est complète pour tout p. à l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné ϕ un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
2. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout nombre premier p suffisamment grand.
3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinité de nombres premiers p.

Utiliser ce principe pour montrer que toute application polynomiale de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^m$ injective est nécessairement surjective.

Exercice 10. Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{P}(I)$ est dit *σ-complet* si toute intersection d'une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$ est encore dans $\mathcal{U}$.

1. Montrer qu'un ultrafiltre sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ est σ-complet ssi il est principal.
2. Montrer qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{P}(I)$ n'est pas σ-complet ssi il existe une famille dénombrable et décroissante d'éléments de $\mathcal{U}$ dont l'intersection est vide.
3. Soient $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}(I)$ non σ-complet et $\mathcal{N}$ l'ultraproduit correspondant. On considère un ensemble dénombrable $\pi(\bar{x}) = \{\phi_n(\bar{x}) : n \in \mathbf{N}\}$ de formules. On suppose que π est finiment réalisable dans $\mathcal{N}$.
4. Montrer qu'il existe une suite X_n d'éléments de $\mathcal{U}$ dont l'intersection est triviale et tel que pour tout $i \in X_n$, $\mathcal{M}_i \models \exists\bar{x} \bigwedge_{k=0}^{n} \phi_k(\bar{x})$ (en particulier pour chaque $i \in I$ il existe un plus grand n tel que $i \in X_n$).
5. En déduire qu'il existe $\bar{b} \in \mathcal{N}$ qui réalise π.

Exercice 11. On dit qu'une théorie T est *préservée par sous-structure* si pour toutes structures $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, si $\mathcal{N} \models T$, alors $\mathcal{M} \models T$. Une formule est dite *universelle* si elle est de la forme $\forall\bar{x}\ \phi$ où ϕ est sans quantificateurs. Une théorie est *universelle* si elle peut être axiomatisée par des énoncés universels. Le but de cet exercice est de montrer qu'une théorie T est préservée par sous-structure ssi elle est universelle.

1. Montrer le sens facile du théorème.
2. Soit maintenant T une théorie préservée par sous-structure et soit T' l'ensemble des conséquences universelles de T. Soit $\mathcal{M} \models T'$ et soit $\Delta(\mathcal{M})$ le diagramme sans quantificateurs de $\mathcal{M}$. Montrer que $T \cup \Delta(\mathcal{M})$ admet un modèle.
3. En déduire que $\mathcal{M} \models T$ et conclure la preuve.