

## Feuille 7 - Théorème de compacité

**Exercice 1.** 1. Soit  $T$  une théorie et  $\varphi$  un énoncé tel que  $T \vdash \varphi$ . Montrer qu'il existe une partie finie  $T' \subseteq T$  telle que  $T' \vdash \varphi$ .

2. Montrer que si  $T$  est une théorie finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de  $T$ , on peut extraire une axiomatisation finie.

**Exercice 2.** Montrer qu'une théorie  $T$  qui a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand a un modèle infini.

**Exercice 3.** Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules  $\Phi(x)$  dans le langage des groupes tel que pour tout groupe  $G$  et tout  $g \in G$   $g$  satisfait  $\Phi(x)$  si et seulement si l'ordre de  $g$  est fini.

**Exercice 4.** Montrer que la classe de graphes connexes n'est pas axiomatisable en premier ordre (dans un langage qui comporte une relation binaire pour les arêtes).

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{L}$  un langage,  $\theta$  un énoncé de ce langage et  $T_1, T_2$  deux théories dans ce langage qui contiennent  $\theta$ . On suppose que tout modèle de  $\theta$  est soit modèle de  $T_1$  soit modèle de  $T_2$  mais jamais des deux. Montrer que  $T_1$  et  $T_2$  sont finiment axiomatisables.

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{L}$  un langage fini, et  $T$  une théorie dans le langage  $\mathcal{L}$ . On suppose que, dans tout modèle de  $T$ , les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies. Montrer qu'il existe une fonction  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $n$ , une sous-structure engendrée par  $n$  éléments d'un modèle de  $T$  est de cardinal inférieur à  $f(n)$ .

**Exercice 7.** (Ordres discrets sans extrémités.) Soient  $\mathcal{L} = \{<\}$  où  $<$  est un symbole de relation binaire. Dans ce langage, soit  $T$  la théorie qui énonce qu'elle est une relation d'ordre discret sans extrémités et qui est formé par les conséquences de ces énoncés.

1. Écrire les énoncés qui axiomatisent  $T$ .
2. Vérifier que tout ensemble de la forme  $K \times \mathbb{Z}$  ordonné par l'ordre lexicographique avec priorité sur la première coordonnée, où  $K$  est une chaîne dense sans extrémités et  $\mathbb{Z}$  est muni de son ordre discret usuel, est modèle de  $T$ . Montrer que deux tels modèles sont  $\infty$ -équivalents.
3. Montrer que tout modèle de  $T$  a une extension élémentaire qui est de la forme décrite dans le point précédent. Dédurre que  $T$  est une théorie complète.

**Exercice 8.** On considère le langage  $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i < \omega}$  où chaque  $E_i$  est un symbole de relation binaire.

1. Écrire les énoncés qui disent que chaque  $E_i$  est une relation d'équivalence, que  $E_0$  n'a qu'une seule classe d'équivalence, et que pour tout  $i < \omega$ , la relation  $E_{i+1}$  partitionne chaque classe de  $E_i$  en exactement deux classes infinies.
2. Donner un modèle des énoncés ci-dessus ; on notera  $T$  la théorie formée par ces énoncés et leurs conséquences.
3. On dit qu'un modèle  $\mathcal{M}$  de  $T$  est *riche* si pour tout  $a \in M$  il existe une infinité de  $b \in M$  tels que  $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$  pour tout  $i < \omega$ . Montrer que deux modèles riches de  $T$  sont  $\infty$ -équivalents.
4. Montrer que tout modèle  $\mathcal{M}$  de  $T$  a une extension élémentaire riche et en déduire que  $T$  est complète.
5. La théorie  $T$  est-elle  $\aleph_0$ -catégorique ?  $\kappa$ -catégorique pour un cardinal  $\kappa$  ?

**Exercice 9.** On rappelle que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  ( $0$  ou un nombre premier) est complète pour tout  $p$ . à l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné  $\phi$  un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\phi$  est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
2.  $\phi$  est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ , pour tout nombre premier  $p$  suffisamment grand.
3.  $\phi$  est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  pour une infinité de nombres premiers  $p$ .

Utiliser ce principe pour montrer que toute application polynomiale de  $C^m$  dans  $C^m$  injective est nécessairement surjective.

**Exercice 10.** Un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{P}(I)$  est dit  $\sigma$ -complet si toute intersection d'une famille dénombrable d'éléments de  $\mathcal{U}$  est encore dans  $\mathcal{U}$ .

1. Montrer qu'un ultrafiltre sur  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est  $\sigma$ -complet ssi il est principal.
2. Montrer qu'un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{P}(I)$  n'est pas  $\sigma$ -complet ssi il existe une famille dénombrable et décroissante d'éléments de  $\mathcal{U}$  dont l'intersection est vide.
3. Soient  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  une famille de  $\mathcal{L}$ -structures,  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathcal{P}(I)$  non  $\sigma$ -complet et  $\mathcal{N}$  l'ultraproduit correspondant. On considère un ensemble dénombrable  $\pi(\bar{x}) = \{\phi_n(\bar{x}) : n \in \mathbb{N}\}$  de formules. On suppose que  $\pi$  est finiment réalisable dans  $\mathcal{N}$ .
4. Montrer qu'il existe une suite  $X_n$  d'éléments de  $\mathcal{U}$  dont l'intersection est triviale et tel que pour tout  $i \in X_n$ ,  $\mathcal{M}_i \models \exists \bar{x} \bigwedge_{k=0}^n \phi_k(\bar{x})$  (en particulier pour chaque  $i \in I$  il existe un plus grand  $n$  tel que  $i \in X_n$ ).
5. En déduire qu'il existe  $\bar{b} \in \mathcal{N}$  qui réalise  $\pi$ .

**Exercice 11.** On dit qu'une théorie  $T$  est *préservée par sous-structure* si pour toutes structures  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ , si  $\mathcal{N} \models T$ , alors  $\mathcal{M} \models T$ . Une formule est dite *universelle* si elle est de la forme  $\forall \bar{x} \phi$  où  $\phi$  est sans quantificateurs. Une théorie est *universelle* si elle peut être axiomatisée par des énoncés universels. Le but de cet exercice est de montrer qu'une théorie  $T$  est préservée par sous-structure ssi elle est universelle.

1. Montrer le sens facile du théorème.
2. Soit maintenant  $T$  une théorie préservée par sous-structure et soit  $T'$  l'ensemble des conséquences universelles de  $T$ . Soit  $\mathcal{M} \models T'$  et soit  $\Delta(\mathcal{M})$  le diagramme sans quantificateurs de  $\mathcal{M}$ . Montrer que  $T \cup \Delta(\mathcal{M})$  admet un modèle.
3. En déduire que  $\mathcal{M} \models T$  et conclure la preuve.