Feuille 8 – Types et saturation

Exercice 1. Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, T la théorie de $\mathcal{M}$ et $p \in S_n(T)$. Supposons que pour chaque extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, il y a au plus un nombre fini de réalisations de p dans $\mathcal{N}$ (un tel type est dit *algébrique*).

1. Montrer qu'il existe une formule $\phi(\bar{x}) \in p$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{M}$.
2. Montrer que toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ est nécessairement dans $\mathcal{M}$.
3. Soit $\phi(\bar{x}) \in p$ ayant un nombre fini m de réalisations dans $\mathcal{M}$, et telle que m soit minimal. Montrer que ϕ *isole* p, c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ.

Exercice 2.

1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?
2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 3. Soit $L = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
2. Décrire $S_1(T)$. Les types de $S_1(T)$ sont-t-ils réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 4. On considère la théorie T de $\mathbf{R}$ en tant que corps dans le langage des anneaux. Montrer que $|S_1(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 5. Soit T la théorie des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.

1. Donner une axiomatisation de T.
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x \ x < S(x) \wedge \neg\exists y (x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de cette théorie, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Exercice 6. On considère les structures suivantes, dans le langage des corps : $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, et $\mathbf{C}$ (où $\overline{\mathbf{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$). Quelles structures de cette liste sont-elles ω-saturées ?

Exercice 7. Soit $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'élements de N. Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(m_0, \ldots, m_k)$ et $(n_0, \ldots, n_k)$ ont le même type.

Exercice 8. Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constante. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que l'ensemble A des éléments majorant tous les c_i n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
3. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).
4. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
5. Montrer qu'il existe deux des modéles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.

Exercice 9. Soit le langage $L = \{P_i, Q_i : i \in \omega\}$ où les P_i et les Q_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans ce langage qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints, que les Q_i sont également deux à deux disjoints et que, pour tout i, j l'intersection $P_i \cap Q_j$ est infinie.

1. Donner un exemple de modèle de T.
2. Expliquer brièvement pourquoi T est complète et élimine les quanteurs.
3. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables (à isomorphisme près) ? A-t-elle un modèle dénombrable ω-saturé ?

Exercice 10. Soit $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux L-structures.

1. Montrer que si $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sont ∞-équivalentes et que $\mathcal{M}$ est ω-saturée alors $\mathcal{N}$ est ω-saturée.
2. On dit que $f : A \to \mathcal{N}$ (où $A \subset M$) est une application partielle élémentaire si pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ et toute formule φ on a

   $$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n)) .$$

   Montrer qu'une structure dénombrable ω-saturée est *homogène* : pour toute application partielle élémentaire $f_0 : A \to \mathcal{M}$ définie sur une partie finie A de M, et tout $m \in M$, il existe $n \in N$ tel que l'extension de f_0 obtenue en posant $f(m) = n$ soit encore élémentaire.
3. Montrer que deux structures élémentairement équivalentes, dénombrables et ω-saturées sont isomorphes.