

Feuille 8 – Types et saturation

Exercice 1. Soit \mathcal{M} une L -structure, T la théorie de \mathcal{M} et $p \in S_n(T)$. Supposons que pour chaque extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} , il y a au plus un nombre fini de réalisations de p dans \mathcal{N} (un tel type est dit *algébrique*).

1. Montrer qu'il existe une formule $\phi(\bar{x}) \in p$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments dans \mathcal{M} .
2. Montrer que toute réalisation de p dans une extension élémentaire de \mathcal{M} est nécessairement dans \mathcal{M} .
3. Soit $\phi(\bar{x}) \in p$ ayant un nombre fini m de réalisations dans \mathcal{M} , et telle que m soit minimal. Montrer que ϕ isole p , c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ .

Exercice 2. 1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?

2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 3. Soit $L = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Montrer que T est complète et élimine les quantificateurs.
2. Décrire $S_1(T)$. Les types de $S_1(T)$ sont-ils réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 4. On considère la théorie T de \mathbf{R} en tant que corps dans le langage des anneaux. Montrer que $|S_1(T)| = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 5. Soit T la théorie des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.

1. Donner une axiomatisation de T .
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x \ x < S(x) \wedge \neg \exists y (x < y < S(x))\}$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n -types de T .
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles \mathcal{M} et \mathcal{N} de cette théorie, si \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N} alors \mathcal{M} est sous-structure élémentaire de \mathcal{N} . Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Exercice 6. On considère les structures suivantes, dans le langage des corps : \mathbf{Q} , $\overline{\mathbf{Q}}$, \mathbf{R} , et \mathbf{C} (où $\overline{\mathbf{Q}}$ désigne la clôture algébrique de \mathbf{Q}). Quelles structures de cette liste sont-elles ω -saturées ?

Exercice 7. Soit \mathcal{M} une structure ω -saturée, \mathcal{N} une extension élémentaire de \mathcal{M} et $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de N . Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ (m_0, \dots, m_k) et (n_0, \dots, n_k) ont le même type.

Exercice 8. Soit le langage $L = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constante. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit \mathcal{M} un modèle ω -saturé de T . Montrer que l'ensemble A des éléments majorant tous les c_i n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que T est complète et élimine les quantificateurs.
3. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i) .
4. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
5. Montrer qu'il existe deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.

Exercice 9. Soit le langage $L = \{P_i, Q_i : i \in \omega\}$ où les P_i et les Q_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans ce langage qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints, que les Q_i sont également deux à deux disjoints et que, pour tout i, j l'intersection $P_i \cap Q_j$ est infinie.

1. Donner un exemple de modèle de T .
2. Expliquer brièvement pourquoi T est complète et élimine les quantificateurs.
3. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables (à isomorphisme près)? A-t-elle un modèle dénombrable ω -saturé?

Exercice 10. Soit \mathcal{M}, \mathcal{N} deux L -structures.

1. Montrer que si \mathcal{M}, \mathcal{N} sont ∞ -équivalentes et que \mathcal{M} est ω -saturée alors \mathcal{N} est ω -saturée.
2. On dit que $f : A \rightarrow \mathcal{N}$ (où $A \subset M$) est une application partielle élémentaire si pour tout $a_1, \dots, a_n \in A$ et toute formule φ on a

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n)) .$$

Montrer qu'une structure dénombrable ω -saturée est *homogène* : pour toute application partielle élémentaire $f_0 : A \rightarrow \mathcal{M}$ définie sur une partie finie A de M , et tout $m \in M$, il existe $n \in N$ tel que l'extension de f_0 obtenue en posant $f(m) = n$ soit encore élémentaire.

3. Montrer que deux structures élémentairement équivalentes, dénombrables et ω -saturées sont isomorphes.