Moyennabilité et équivalence orbitale : exercices

23 février 2024

Exercice 1. Montrer que si G est un groupe moyennable et $H \leq G$, alors H est moyennable.

Exercice 2. (☣) Soient $R, S \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ les rotations données par :

$$R = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et soit $\phi \colon \mathbf{F}_2 \to \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ l'homomorphisme défini par $\phi(a) = R, \phi(b) = S$, où a et b sont les générateurs du groupe libre $\mathbf{F}_2$. Soient e_1, e_2, e_3 les vecteurs de base standard de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que si $w \in \mathbf{F}_2$ est un mot réduit dont la dernière lettre (à droite) est a ou a^{-1}, alors

   $$\phi(w) \cdot e_1 = \frac{1}{3^k}(xe_1 + y\sqrt{2}e_2 + ze_3)$$

   avec $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}_{>0}$, et y non divisible par 3. En particulier, $\phi(w) \neq 1$ pour tous ces w. (*Indication :* Argumentez par récurrence sur la longueur de w.)

2. Conclure que l'homomorphisme ϕ est injectif.

Exercice 3. Montrer que les deux intervalles $[0,1]$ et $[0,1)$ sont des parties équidécomposables de $\mathbf{R}$ par rapport au groupe des translations.

Exercice 4. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne, dénombrable, à classes infinies sur un espace borélien standard. Montrer que si $\mathcal{R}$ est lisse, alors il existe un borélien standard Y tel que $\mathcal{R}$ est isomorphe à la relation $\mathcal{S}$ sur $Y \times \mathbf{N}$ donnée par

$$(y_1, i_1)\,\mathcal{S}\,(y_2, i_2) \iff y_1 = y_2.$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne, dénombrable sur un espace borélien standard X. Soit $A \subseteq X$ une section complète (une partie borélienne qui intersecte toutes les classes) de $\mathcal{R}$. Montrer que si $\mathcal{R}|_A$ est hyperfinie, alors $\mathcal{R}$ l'est aussi.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que toutes les actions libres p.m.p. du groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ (des matrices 3×3 de déterminant 1 à coefficients entiers) ont coût $= 1$. Pour $i, j \in \{1,2,3\}$, soit $E_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ formée de 1 sur la diagonale, d'un 1 marginal en position (i, j) et de zéros ailleurs.

1. Soit $G_{i,j,k,l} = \langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle$ le sous-groupe engendré par $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$. Montrer que si $i = k$ ou bien $j = l$ mais $(i, j) \neq (k, l)$, alors le sous-groupe $G_{i,j,k,l}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

2. Montrer que la famille des $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}}$ engendre $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$.

3. Montrer que toutes les actions libres p.m.p. de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ ont coût $= 1$.

Exercice 7. (☣) Considérons une rotation r d'angle irrationnel θ sur le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et soit s la transformation induite sur $\mathbb{T}^1$ par la symétrie $x \mapsto 1 - x$.

(0) Montrer que $s^2 = 1$ et $srs^{-1} = r^{-1}$.

Soit $p : \mathbb{T}^1 \to Y := \mathbb{T}^1/(x \sim s(x))$ l'application de passage au quotient de $\mathbb{T}^1$ par la relation d'équivalence définie par s. Observer que Y est un Borélien standard.

Soit Φ le graphage de $\mathbb{T}^1$ donné par $r : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$. Il définit un graphe Borélien orienté, i.e. $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}_\Phi^+ \sqcup \mathcal{E}_\Phi^-$ où $\mathcal{E}_\Phi^+ = \{(x, r(x)) \mid x \in \mathbb{T}^1\}$ et $\mathcal{E}_\Phi^- = \{(r(x), x) \mid x \in \mathbb{T}^1\}$. Observer que Φ induit un graphe Borélien sur Y :

$$\mathcal{G} := \{(u, v) \mid \exists x \in \mathbb{T}^1 \text{ t.q. } (u, v) = (p(x), p(r(x))) \text{ ou } (u, v) = (p(r(x)), p(x))\}.$$

Quelle est la valence de chaque sommet ?

Supposons que $\mathcal{G}$ est défini par une action p.m.p. de $\mathbf{Z}$ sur Y, i.e. il existe un isomorphisme borélien $T : X \to X$ tel que $\mathcal{G}$ est la réunion du graphe de T et du graphe de T^{-1}. On note $\mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{G}$ le graphe de T et $\mathcal{G}^- \subseteq \mathcal{G}$ le graphe de T^{-1}.

On définit alors les Boréliens $A^+ := \{x \in \mathbb{T}^1 \mid (p(x), p(r(x))) \in \mathcal{G}^+\}$ et $A^- := \{x \in \mathbb{T}^1 \mid (p(x), p(r(x))) \in \mathcal{G}^-\}$.

1. Montrer que $s(A^+) = A^-$ et montrer que A^+ et A^- forment une partition de $\mathbb{T}^1$. En déduire la mesure de A^+.

2. Montrer que $r(A^+) = A^+$.

3. Montrer que les deux derniers item conduisent à une absurdité. En conclure que $\mathcal{G}$ n'admet aucune orientation linéaire mesurable.

Exercice 8. (☣) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dénombrable pmp sur l'espace de probabilité standard (X, μ). Montrer que le groupe plein $[\mathcal{R}]$ est séparable pour la métrique uniforme donnée par $d_u(S, T) = \mu(\{x : Tx \neq Sx\})$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dénombrable pmp et **ergodique** sur (X, μ). Soient A at B deux parties boréliennes de X qui ont la même mesure $\mu(A) = \mu(B)$. Montrer qu'il existe un élément du groupe plein $T \in [\mathcal{R}]$ tel que $T(A) = B$.

Exercice 10.

1. Soit $\mathbf{Z} \curvearrowright^\alpha (X, \mu)$ une action libre p.m.p. ergodique de $\mathbf{Z}$. Soit $A \subset X$ une partie borélienne non négligeable.

   a) Montrer que la restriction $\mathcal{R}_\alpha|A$ est induite par une action libre ergodique β de $\mathbf{Z}$.

   b) Montrer que les actions α et β sont orbitalement équivalentes.

2. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurée p.m.p. ***ergodique***.

   a) Montrer que si $A, B \subseteq X$ sont des parties boréliennes telles que $\mu(A) = \mu(B) > 0$ alors $\mathcal{R}|A \simeq \mathcal{R}|B$, i.e. les restrictions $\mathcal{R}|A$ et $\mathcal{R}|B$ (sur les boréliens standards équipés des mesures de probabilité restreintes normalisées $(A, \bar{\mu}_A)$ et $(B, \bar{\mu}_B)$) sont isomorphes.

   On note alors $\mathcal{R}^t$ la relation d'équivalence, bien définie à isomorphisme près, $\mathcal{R}|A$ sur $(A, \bar{\mu}_A)$ pour n'importe quel $A \subseteq X$ borélien de mesure $\mu(A) = t \in]0, 1]$.

   b) Montrer que pour tout $s, t, u \in]0, 1] \times]0, 1] \times]0, 1]$, on a

   -i- $(\mathcal{R}^s)^t \simeq \mathcal{R}^{st}$

   -ii- si $\mathcal{R}^s \simeq \mathcal{R}^t$ alors $\mathcal{R}^{su} \simeq \mathcal{R}^{tu}$

   c) On définit

   $$\mathcal{F}(\mathcal{R}) := \left\{ \frac{\mu(A)}{\mu(B)} : \mathcal{R}|A \simeq \mathcal{R}|B \right\} = \left\{ \frac{s}{t} : s, t \in]0, 1] \text{ et } \mathcal{R}^s \simeq \mathcal{R}^t \right\} \tag{1}$$

   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$.

d) Donner un sens compatible avec ce qui précède à $\mathcal{R}^t$ pour $t > 1$.

3. Soit $\Gamma \curvearrowright^{\alpha} (X, \mu)$ une action p.m.p. ergodique et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence des orbites.

   a) Pour $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$, calculer $\mathcal{F}(\mathcal{R})$.
   b) Pour $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^2$, calculer $\mathcal{F}(\mathcal{R})$.
   c) Pour $\Gamma \simeq \mathbf{F}_2$, calculer $\mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Exercice 11. Soit $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots,)$ un ***arborage*** tel que φ_0 a un domaine de mesure pleine et tel que la transformation associée $\varphi_0 : X \to X$ agit ergodiquement. On suppose que le coût vérifie

$$\mathcal{C}(\Phi) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu(\mathrm{dom}(\varphi_i)) = n \tag{2}$$

est un entier.

1. Montrer que $\mathcal{R}_\Phi$ peut être engendrée par une action d'un groupe Γ à n générateurs.

2. Montrer que Γ est un groupe libre et que son action est libre.

Exercice 12. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dénombrable pmp **ergodique** sur l'espace de probabilité standard (X, μ).

1. (☢) Supposons que $\mathcal{R}$ est arborable et que $\mathcal{R}$ est de coût $= 1$. Montrer qu'alors $\mathcal{R}$ est hyperfinie. (On pourra penser à utiliser une technique d'élagage des arborages.)

2. En déduire que les actions libres pmp des groupes $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$, ou $\Gamma = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{Z}$ ne sont jamais arborables.

Exercice 13. Montrer le lemme de Rokhlin : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ une transformation apériodique (toutes ses orbites sont infinies). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un borélien $A \subseteq X$ dont les itérés jusqu'à n sont deux à deux disjoints et leur réunion couvre l'espace à ϵ près :
- $T^i(A) \cap T^j(A) = \emptyset$ pour tous entiers $0 \leq i \neq j \leq n$, et
- $\mu(\cup_{i=0}^{n} T^i(A)) \leq \epsilon$.

Exercice 14. Les propriétés suivantes sont-elles invariantes pour l'équivalence orbitale (OE) entre groupes ? **Argumenter** ou donner un contre-exemple.

1. Être commutatif ?

2. (☣) Avoir la propriété (T) ?

3. Être un groupe libre ?

4. Être un produit direct de deux groupes infinis ?

5. Être un groupe Γ de coût $\mathcal{C}_*(\Gamma) = 1$?

Exercice 15. Soit $\mathbf{F}_3$ est le groupe libre à 3 générateurs. Répondre par oui ou par non, puis **argumenter**.

1. Les actions libres ergodiques p.m.p. de $\mathbf{F}_3 \times \mathbf{Z}^2$ sont-elles toutes orbitalement équivalentes entre elles ?

2. $\mathbf{F}_3 \times \mathbf{Z}^2$ et $\mathbf{F}_3 \times \mathbf{Z}^3$ possèdent-ils des actions libres p.m.p. orbitalement équivalentes ?

3. $\mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_3$ possèdent-ils des actions libres ergodiques p.m.p. orbitalement équivalentes ?

Exercice 16. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur l'espace borélien standard de probabilité (X, μ).

Montrer que $\mathcal{R}$ est pmp si et seulement si les deux mesures M_l et M_r sur $\mathcal{R}$ sont égales, où

$$M_l(A) = \int_X |A_x| d\mu(x) \quad \text{et} \quad M_r(A) = \int_X |A^x| d\mu(x).$$