# Examen du 10 mai 2012

Durée 3h

*L'emploi des notes du cours est autorisé.*

**Exercice 1.** Deux théories $T_1$ et $T_2$ dans un même langage sont dites *compagnes* l'une de l'autre si tout modèle de l'une peut se plonger dans un modèle de l'autre et vice versa.

1. Soit $T_1$, $T_2$ deux théories compagnes l'une de l'autre. Montrer qu'elles ont mêmes conséquences universelles.
   (Une formule est dite universelle si elle est de la forme $\forall x_1 \dots x_n \phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ avec $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans quantificateurs. Une conséquence universelle d'une théorie $T$ est un énoncé universel $\theta$ tel que $T \models \theta$.)
2. Soit $T_1, T_2$ deux théories telles que toute conséquence universelle de $T_2$ est également conséquence de $T_1$. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de $T_1$. Montrer que
   $$T_2 \cup \{\phi(\bar{m}) : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}), \phi \text{ formule sans quantificateurs}\}$$
   est consistant, où l'on a rajouté des constantes pour les éléments de $M$. En déduire que tout modèle de $T_1$ se plonge dans un modèle de $T_2$.
3. Conclure que deux théories sont compagnes l'une de l'autre si et seulement si elles ont même conséquences universelles.
4. En déduire que deux théories modèle-complètes compagnes l'une de l'autre sont équivalentes.
   (Une théorie $T$ est modèle-complète si tout plongement de modèles de $T$ est élémentaire.)

**Exercice 2.** Soit $f$ est un symbole de fonction unaire. Pour tout $n \geq 0$ on notera $f^n$ la composée $n$-fois de $f$. Soit $T$ la théorie axiomatisée par

$$\forall x\, f^n(x) \neq x \ \ (\text{pour tout } n \geq 1)$$
$$\exists x\, (\forall z\, f(z) \neq x \wedge \forall y\, (\forall t\, f(t) \neq y \to x = y))$$
$$\forall x \forall y\, (f(x) = f(y) \to x = y)$$

1. Montrer que tout modèle de $T$ est infini.
2. Montrer que $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ où $s$ est la fonction successeur est un modèle de $T$.
3. Montrer que $T$ n'est pas finiment axiomatisable.
4. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de $T$. On définit sur $\mathfrak{M}$ la relation $x \sim y$ s'il existe $m, n \geq 0$ tel que $\mathfrak{M} \models f^m(x) = f^n(y)$.
   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que chaque classe d'équivalence est une sous-structure de $\mathfrak{M}$.
   (c) Montrer qu'une et une seule classe est isomorphe à $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ et que toutes les autres sont isomorphes à $\langle \mathbb{Z}, s \rangle$ avec $s$ la fonction successeur sur $\mathbb{Z}$.
5. Soit $\kappa$ un cardinal infini non dénombrable. Montrer que $T$ est $\kappa$-catégorique.
6. Soit $c$ un symbole de constante et $T'$ la théorie axiomatisée par $T$ et l'axiome $\forall z f(z) \neq c$. Montrer que $T'$ est complète et élimine les quanteurs.

**Exercice 3.** Soit $\mathfrak{M}$ une structure saturée, $\bar{a}$ un uplet de $M$, et $X$ un sous-ensemble de $M$ définissable et invariant par tout automorphisme de $\mathfrak{M}$ qui fixe $\bar{a}$.

1. Si $\phi(x, \bar{b})$ définit $X$ et $p = \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$, montrer que pour des nouvelles constantes $\bar{c}$ on a
   $$\mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup p(\bar{b}) \cup p(\bar{c}) \models \forall x\, (\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c})).$$
2. En déduire qu'une partie finie $\pi(x) \subset p(x)$ suffit pour que
   $$\mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup \pi(\bar{b}) \cup \pi(\bar{c}) \models \forall x\, (\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c})).$$
3. En déduire que $X$ est définissable avec une formule à paramètres $\bar{a}$.