Examen du 10 mai 2012

Durée 3h

L'emploi des notes du cours est autorisé.

Corrigé

Exercice 1. Deux théories T_1 et T_2 dans un même langage sont dites *compagnes* l'une de l'autre si tout modèle de l'une peut se plonger dans un modèle de l'autre et vice versa.

1. Soit T_1, T_2 deux théories compagnes l'une de l'autre. Montrer qu'elles ont mêmes conséquences universelles.
   (Une formule est dite universelle si elle est de la forme $\forall x_1 \ldots x_n \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ avec $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans quantificateurs. Une conséquence universelle d'une théorie T est un énoncé universel θ tel que $T \models \theta$.)
2. Soit T_1, T_2 deux théories telles que toute conséquence universelle de T_2 est également conséquence de T_1. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T_1. Montrer que
$$T_2 \cup \{\phi(\bar{m}) : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}), \phi \text{ formule sans quantificateurs}\}$$
   est consistant, où l'on a rajouté des constantes pour les éléments de M. En déduire que tout modèle de T_1 se plonge dans un modèle de T_2.
3. Conclure que deux théories sont compagnes l'une de l'autre si et seulement si elles ont même conséquences universelles.
4. En déduire que deux théories modèle-complètes compagnes l'une de l'autre sont équivalentes.
   (Une théorie T est modèle-complète si tout plongement de modèles de T est élémentaire.)

Solution.

1. Soit $\forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$ une conséquence universelle de T_1, où ϕ est sans quanteurs. Soit $\mathfrak{M} \models T_2$ et $\mathfrak{M} \in M$. Alors il y a un modèle $\mathfrak{N} \models T_1$ tel que $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Puisque $\mathfrak{N} \models T_1$ on a $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$, et donc $\mathfrak{N} \models \phi(\bar{m})$. Comme $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ et ϕ est sans quanteurs, $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$. Puisque $\mathfrak{M}$ et $\bar{m}$ étaient quelconques, $T_2 \models \forall \bar{x}\, \phi(\bar{x})$. Les consequences universelles de T_1 sont donc aussi conséquences de T_2 ; la réciproque suit par symétrie.
2. Soit $\Sigma = T_2 \cup \{\phi(\bar{m}) : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}), \phi \text{ formule sans quantificateurs}\}$ et Σ_0 une partie finie de Σ. Soit $\psi(\bar{m})$ la conjonction des formules dans Σ_0 qui ne proviennent pas de T_2. Si Σ_0 n'a pas de modèle, alors $T_2 \models \forall \bar{x}\, \neg\psi(\bar{x})$. Donc $T_1 \models \forall \bar{x}\, \neg\psi(\bar{x})$ d'après la première partie. Mais $\mathfrak{M} \models T_1 \cup \{\psi(\bar{m})\}$, une contradiction. Par compacité, Σ est consistant. Si $\mathfrak{N} \models \Sigma$, alors $m \mapsto m^{\mathfrak{N}}$ est un plongement de $\mathfrak{M}$ dans un modèle de T_2.
3. Conséquence de 1. et 2.
4. Soit $\mathfrak{M}_0 \models T_1$. Alors on peut trouver inductivement une suite $(\mathfrak{M}_i : i < \omega)$ de modèles de T_1 et une suite $(\mathfrak{N}_i : i < \omega)$ de modèles de T_2 tel que $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_i$ et $\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{M}_{i+1}$. Alors $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_{i+1}$ et $\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{N}_{i+1}$; par modèle-complétude $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}_{i+1}$ et $\mathfrak{N}_i \preceq \mathfrak{N}_{i+1}$. Si $\mathfrak{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$, alors $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{N}_i$, et $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}_0 \preceq \mathfrak{M}$. Donc $\mathfrak{M} \models T_2$, et $\mathfrak{M}_0 \models T_2$. Comme $\mathfrak{M}_0$ était quelconque, $T_1 \models T_2$. Par symétrie $T_2 \models T_1$, et les deux théories sont équivalentes.

Exercice 2. Soit f est un symbole de fonction unaire. Pour tout $n \geq 0$ on notera f^n la composée n-fois de f. Soit T la théorie axiomatisée par

$$\begin{array}{l} \forall x\, f^n(x) \neq x \quad \text{(pour tout } n \geq 1) \\ \exists x\, (\forall z\; f(z) \neq x \wedge \forall y\, (\forall t\; f(t) \neq y \to x = y)) \\ \forall x \forall y\, (f(x) = f(y) \to x = y) \end{array}$$

1. Montrer que tout modèle de T est infini.
2. Montrer que $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ où s est la fonction successeur est un modèle de T.
3. Montrer que T n'est pas finiment axiomatisable.
4. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T. On définit sur $\mathfrak{M}$ la relation $x \sim y$ s'il existe $m, n \geq 0$ tel que $\mathfrak{M} \models f^m(x) = f^n(y)$.
   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que chaque classe d'équivalence est une sous-structure de $\mathfrak{M}$.
   (c) Montrer qu'une et une seule classe est isomorphe à $\langle \mathbb{N}, s \rangle$ et que toutes les autres sont isomorphes à $\langle \mathbb{Z}, s \rangle$ avec s la fonction successeur sur $\mathbb{Z}$.
5. Soit κ un cardinal infini non dénombrable. Montrer que T est κ-catégorique.
6. Soit c un symbole de constante et T' la théorie axiomatisée par T et l'axiome $\forall z f(z) \neq c$. Montrer que T' est complète et élimine les quanteurs.

Solution.

1. Le troisième axiome dit que f est injective, et le deuxième que f n'est pas surjective. Donc tout modèle est infini.
2. On vérifie facilement les axiomes.
3. Si Σ est une partie finie de T, soit n maximal tel que Σ contienne l'axiome $\forall x\, f^n(x) \neq x$. Soit $\mathfrak{M}_n$ la structure qui consiste de la réunion disjointe de $(\mathbb{N}, s)$ avec $(\{a_0, \ldots, a_n\}, s)$, où $s(a_i) = a_{i+1}$ mod $n+1$. On vérifie facilement les axiomes de Σ. Mais $\mathfrak{M}_n \not\models T$.

   Maintenant, si T était finiment axiomatisable, disons par Φ, alosr par compacité un sous-ensemble fini Σ d'axiomes de T suffiraient pour impliquer Φ, et donc T. Mais on vient de voir qu'aucun sous-ensemble fini d'axiomes implique T. Donc T n'est pas finiment axiomatisable.
4. (a) Si $f^n(x) = f^m(y)$ et $f^s(y) = f^t(z)$, alors $f^{n+s}(x) = f^{n+s}(y) = f^{n+t}(z)$. Donc $\sim$ est transitif. Reflexivité et symétrie sont évidentes.
   (b) Puisque $f(x) \sim x$ pour tout x, chaque classe d'équivalence est close par l'unique fonction (et il n'y a pas de constantes). Elle est donc sous-structure.
   (c) Il existe un seul x_0 qui n'est pas dans l'image de f. Comme f est injective, sa classe est isomorphe à $(\mathbb{N}, s)$; puisqu'il n'y a pas de cycles, les autres classes sont isomorphes à $(\mathbb{Z}, s)$.
5. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de cardinal κ non-dénombrable, chacun est réunion disjointe d'une copie de $(\mathbb{N}, s)$ avec κ copies de $(\mathbb{Z}, s)$ (car $\mathbb{Z}$ est dénombrable). $\mathfrak{M}$ et $\mathbb{N}$ sont donc isomorphes, et T est κ-catégorique.
6. Un modèle $\mathfrak{M} \models T'$ de cardinal $\kappa > \aleph_0$ est modèle de T, et donc réunion disjointe d'une copie de $(\mathbb{N}, s)$ avec κ copies de $(\mathbb{Z}, s)$. De plus, $c^{\mathfrak{M}}$ est le 0 e $\mathbb{N}$, l'unique élément qui n'est pas dans l'image de f. Ainsi T' est κ-catégorique, et donc complète.

   Il est facile de voir que sur les modèles non-dénombrables, les isomophismes partiels de domaine fini forment une famille karpienne. Donc T élimine les quanteurs.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{M}$ une structure saturée, $\bar{a}$ un uplet de M, et X un sous-ensemble de M définissable et invariant par tout automorphisme de $\mathfrak{M}$ qui fixe $\bar{a}$.

1. Si $\phi(x, \bar{b})$ définit X et $p = \mathrm{t}p(\bar{b}/\bar{a})$, montrer que pour des nouvelles constantes $\bar{c}$ on a

$$\mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup p(\bar{b}) \cup p(\bar{c}) \models \forall x\, (\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c})).$$

2. En déduire qu'une partie finie $\pi(x) \subset p(x)$ suffit pour que

$$\mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup \pi(\bar{b}) \cup \pi(\bar{c}) \models \forall x\, (\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c})).$$

3. En déduire que X est définissable avec une formule à paramètres $\bar{a}$.

Solution.

1. Supposons $\mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup p(\bar{b}) \cup p(\bar{c}) \not\models \forall x\, (\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c}))$. Il y a donc un modèle

$$\mathfrak{N} \models \mathrm{T}h(\mathfrak{M}, \bar{a}) \cup p(\bar{b}) \cup p(\bar{c}) \cup \{\exists x\, \neg(\phi(x, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{c})).$$

   Soit $n \in N$ un témoin pour le quanteur existentiel. Par saturation il existent $\bar{b}'\bar{c}'n' \in M$ réalisant $\mathrm{t}p_{\mathfrak{N}}(\bar{b}\bar{c}n/a)$. Or, $\mathrm{t}p(\bar{b}/\bar{a}) = \mathrm{t}p(\bar{b}'/\bar{a}) = \mathrm{t}p(\bar{c}'/\bar{a})$. Par saturation il y a un automorphisme σ de $\mathfrak{M}$ qui fixe $\bar{a}$ et envoie $\bar{b}'$ sur $\bar{b}$, et τ un autre qui envoie $\bar{b}$ sur $\bar{c}'$. Alors n' témoigne que σ et τ ne peuvent pas tous les deux stabiliser X, une contradiction.
2. Par compacité.
3. La formule $\exists \bar{y}\, (\bigwedge \pi(\bar{y}) \wedge \phi(x, \bar{y})$ définit X avec paramètres $\bar{a}$.