Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2012/2013
Master 1 | Introduction à la logique mathématique

Examen du 13 mai 2013

Durée 3h

L'emploi des notes du cours est autorisé.

Exercice 1. Soit T la théorie des graphes (non-orientés) de degré infini (tout sommet a une infinité de voisins) et sans cycles (de longueur quelconque), dans le langage $\mathcal{L} = \{R, =\}$ où R est la relation binaire d'être lié.

1. Donner des axiomes pour T et décrire les modèles dénombrables.
2. Montrer que T n'élimine pas les quanteurs.
3. On considère le langage $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{D_n : n \in \omega\}$, où les D_n sont des relations binaires définis par
$$D_n(x,y) \Leftrightarrow \exists x_0, \dots, x_n \ \big[x = x_0 \wedge y = x_n \wedge \bigwedge_{i<n} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j \leq n} x_i \neq x_j\big].$$
Soit T' la theorie des graphes non-orientés de degré infini sans cycles dans le langage $\mathcal{L}'$. Montrer que T' est complète et élimine les quanteurs.
4. Quels sont les n-types isolés de T' ? Y a-t-il un modèle premier ?
5. Si A est un sous-ensemble d'un modèle de T', décrire les 1-types sur A. Quels sont les 1-types isolés ? Y a-t-il un modèle premier sur A ?
6. Montrer que T est complète, et décrire les n-types de T.
7. Est-ce que T est modèle-complète ?

Exercice 2. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur ω, et $\mathfrak{M}$ une structure dénombrable dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ultrapuissance $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$.

1. Montrer que $\mathfrak{N}$ est $\aleph_1$ saturé. [Indication : Si $(\varphi_i(x, [\bar{m}^i_j]_j) : i < \omega)$ est une suite consistante de formules à paramètres dans $\mathfrak{N}$, pour tout $j < \omega$ choisir $k_j \leq j$ maximal possible tel qu'il y a $n_j \in \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{i \leq k_j} \varphi_i(n_j, \bar{m}^i_j)$. Montrer que $\mathfrak{N} \models \varphi_i([n_j]_j, [\bar{m}^i_j]_j)$ pour tout $i < \omega$.]
2. Avec l'hypothèse du continu $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, en déduire que deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles ont des ultrapuissances isomorphes.

Exercice 3. Un semigroupe est un ensemble S avec un produit associatif $S^2 \to S$ (donc un groupe possiblement sans élément neutre ou inverses). Un element $s \in S$ est *idempotent* si $s^2 = s$.

1. Montrer que si S est un semigroupe fini et $s \in S$, alors une puissance de s est idempotent.

Soit maintenant $S(K)$ un semigroupe algébrique définissable dans un corps algébriquement clos, c'est-à-dire S est un ensemble définissable sans quanteurs, et le produit est donné par une fonction rationnelle, les deux avec paramètres.

2. Si $K = \tilde{\mathbb{F}}_p$ est la clôture algébrique du corps à p éléments, montrer qu'il existe n_0 tel que $S(\mathbb{F}_{p^n})$ est un semigroupe dès que $n_0|n$. En déduire que $S(K)$ a un idempotent.
3. En déduire que $S(K)$ a un idempotent, quel que soit le corps K algébriquement clos.