Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2012/2013
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Examen du 13 mai 2013

Durée 3h

L'emploi des notes du cours est autorisé.

Exercice 1. Soit T la théorie des graphes (non-orientés) de degré infini (tout sommet a une infinité de voisins) et sans cycles (de longueur quelconque), dans le langage $\mathcal{L} = \{R, =\}$ où R est la relation binaire d'être lié.

1. Donner des axiomes pour T et décrire les modèles dénombrables.
2. Montrer que T n'élimine pas les quanteurs.
3. On considère le langage $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{D_n : n \in \omega\}$, où les D_n sont des relations binaires définis par
$$D_n(x, y) \Leftrightarrow \exists x_0, \dots, x_n \ \big[x = x_0 \wedge y = x_n \wedge \bigwedge_{i<n} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j \leq n} x_i \neq x_j\big].$$
Soit T' la theorie des graphes non-orientés de degré infini sans cycles dans le langage $\mathcal{L}'$. Montrer que T' est complète et élimine les quanteurs.
4. Quels sont les n-types isolés de T' ? Y a-t-il un modèle premier ?
5. Si A est un sous-ensemble d'un modèle de T', décrire les 1-types sur A. Quels sont les 1-types isolés ? Y a-t-il un modèle premier sur A ?
6. Montrer que T est complète, et décrire les n-types de T.
7. Est-ce que T est modèle-complète ?

Solution.

1. T est axiomatisée par :
   - $\forall x \, \neg R(x, x)$.
   - $\forall x \, \forall y \, [R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)]$.
   - $\forall x_0 \dots \forall x_n \, [(R(x_0, x_n) \wedge \bigwedge_{i<n} R(x_i, x_{i+1}) \to \bigvee_{i \neq j} x_i = x_j]$ pour tout $n \geq 2$.
   - $\forall x \, \exists x_0 \dots \exists x_n \, [\bigwedge_{i \leq n} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j]$ pour tout $n < \omega$.

   Les modèles dénombrables sont des forêts (réunion d'arbres) dénombrables de degré $\aleph_0$.
2. Si A, B et C sont trois arbres (disjoints) de degré $\aleph_0$ et $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$, soit D obtenu de la forêt $A \cup B \cup C$ en rajoutant des liens supplémentaires $R(a, b)$ et $R(b, c)$. Alors D est un arbre de degré $\aleph_0$ et $A \cup C$ en est une sous-structure, mais l'inclusion $A \cup C \to D$ n'est pas élémentaire, puisque $\exists x[R(a, x) \wedge R(x, c)]$ est faux dans $A \cup C$ mais vrai dans D.
3. On dira que a et b sont connectés s'il y a un chemin entre les deux. Dans ce cas, (a, b) dénotéra le plus court chemin de a vers b (qui est unique puisqu'un modèle de T n'a pas de cycles). On appelera distance entre a et b, noté $d(a, b)$, la longueur de (a, b) (le nombre de liens). Alors $\models D_n(a, b)$ si et seulement si $d(a, b) = n$.

   Notons d'abord que si a, b et c sont connectés et $d \in (a, b)$ est tel que la distance entre c et d est minimale, alors $2\,d(c, d) = d(a, c) + d(b, c) - d(a, b)$. Si $d(a, c) \leq d(b, c)$ alors
   - si $d(a, c) = d(d, c)$, alors $a = d$;
   - sinon $d(a, c) - d(d, c) = n > 0$ et d est le n-me point sur le chemin (a, b).

   Il en suit que dès qu'on connait la distance de c à a et à b, on connait d ainsi que les distances de c à tous les points de (a, b).

   Supposons donc que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soient deux modèles de T', et que $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$ aient même $\mathcal{L}'$-type sans quanteurs. En remplaçant $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ par des extensions élémentaires, on peut supposer qu'ils sont ω-saturés. Soit $\tilde{m}$ la clôture de $\bar{m}$ par plus courts chemins, et $\tilde{n}$ la clôture de $\bar{n}$ par plus courts chemins. Alors le $\mathcal{L}'$-diagramme de $\bar{m}$ détermine les distances entre les points de $\tilde{m}$, et donc le $\mathcal{L}'$-diagramme de $\tilde{m}$. Ainsi $\tilde{m}$ et $\tilde{n}$ ont même type sans quanteurs. Notons que si $m_1, m_2 \in \tilde{m}$ sont connectés dans $\mathfrak{M}$, alors $(m_1, m_2) \subseteq \tilde{m}$ (et de même pour $\tilde{n}$).

   Si $a \in M$, il y a trois possibilités :

– $a \in \tilde{m}$. On prend alors $b \in \tilde{n}$ le point correspondant.
– $a \notin \tilde{m}$, mais a est connecté à $\tilde{m}$. Soit $a' \in \tilde{m}$ le point de distance minimale à a. Comme $\mathfrak{M}$ n'a pas de cycles, a' est unique. Soit $b' \in \tilde{n}$ le point correspondant à a'. Comme le degré est infini, on trouve $b \in N$ de distance $d(a,b)$ de b', tel que $(b',b) \cap \tilde{n} = \{b'\}$.
– a n'est pas connecté à $\tilde{m}$. Par ω-saturation on trouve $b \in N$ qui n'est pas connecté à $\tilde{n}$.

Dans les trois cas $\tilde{m} \cup \{a\}$ et $\tilde{n} \cup \{b\}$ ont même type sans quanteurs.

Par symétrie, les $\mathcal{L}'$-isomorphismes partiels entre parties finies forment une famille karpienne, et $\mathrm{tp}(\bar{m}) = \mathrm{tp}(\bar{n})$. On en déduit que T' est complète et élimine les quanteurs.

4. Les n-types isolés are ceux où les n points est connectés. Il est isolé par les distances, c'est-à-dire les formules $D_n(x_i,x_j)$ il contient, car ceux-ci déterminent le $\mathcal{L}'$-type atomique, et donc le $\mathcal{L}'$-type.

   Le modèle premier est l'arbre de degré $\aleph_0$. C'est un modèle ; il se plonge dans tout modèle de T', et ce plongement est élémentaire par élimination des quanteurs.

5. Soit $\tilde{A}$ la clôture de A par plus courts chemins. Alors un 1-type $p(x) \in S_1(A)$ connecté à $\tilde{A}$ est déterminé par le point $a \in \tilde{A}$ avec $d(x,a) = n$ minimal, et le fait que ce soit minimal. En particulier :
   – Si $a \in \tilde{A} \setminus A$, soient $b, b' \in A$ tels que $a \in (b,b')$ avec $d(b,b')$ minimal. Alors $p(x)$ est isolé par $D_i(x,b) \wedge D_j(x,b')$, où $i = d(x,b)$ et $j = d(x,b')$.
   – Si $x = a \in A$, alors $p(x)$ est isolé par $x = a$.
   – Si $x \neq a \in A$ et le degré de a dans $\tilde{A}$ est fini (notamment si A est fini), alors $p(x)$ est isolé par
   $$D_i(x,a) \wedge \bigwedge_{b \in A,\ (a,b)\cap A = \{a,b\}} D_{i_b}(x,b),$$
   où $i = d(x,a)$ et $i_b = d(x,b)$. La conjonction est finie, car le degré de a dans $\tilde{A}$ est fini.
   – Si $x \neq a \in A$ et le degré de a dans $\tilde{A}$ est infini, alors $p(x)$ n'est pas isolé.
   – Si x n'est pas connecté à A, alors $p(x)$ n'est pas isolé.

   Il y a un modéle premier sur A, et même un modèle construit sur A : Il suffit de rajouter tous les plus courts chemins entre les points connectés de A, et ensuite successivement un voisin aux points qui n'en ont qu'un nombre fini.

6. Comme T a les mêmes axiomes que T', et tous les D_n sont $\mathcal{L}$-définissables, la complétude de T' implique celle de T.

   Un n-type $p(x_0,\dots,x_n)$ est déterminé par les distances entre ses points, c'est-à-dire les $\mathcal{L}$-formules qui correspondent aux $D_k(x_i,x_j)$, et $\{\neg D_k(x_i,x_j) : k < \omega\}$ si x_i et x_j ne sont pas connectés.

7. L'example de la question 2. montre que T n'est pas modèle-complète.

Exercice 2. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur ω, et $\mathfrak{M}$ une structure dénombrable dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ultrapuissance $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$.

1. Montrer que $\mathfrak{N}$ est $\aleph_1$-saturé. [Indication : Si $(\varphi_i(x,[\bar{m}^i_j]_j) : i < \omega)$ est une suite consistante de formules à paramètres dans $\mathfrak{N}$, pour tout $j < \omega$ choisir $k_j \leq j$ maximal possible tel qu'il y a $n_j \in \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{i \leq k_j} \varphi_i(n_j, \bar{m}^i_j)$. Montrer que $\mathfrak{N} \models \varphi_i([n_j]_j, [\bar{m}^i_j]_j)$ pour tout $i < \omega$.]
2. Avec l'hypothèse du continu $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, en déduire que deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles ont des ultrapuissances isomorphes.

Solution.

1. Soit $A \subset N$ dénombrable, et $p(x) \in S_1(A)$. Comme $\mathcal{L}(A)$ est dénombrable, on peut énumérer $p(x) = \{\varphi_i(x,[\bar{m}^i_j]_j) : i < \omega\}$. Pour tout $j < \omega$ soit $k_j \leq j$ maximal possible tel qu'il y a $n_j \in \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{k \leq k_j} \varphi_k(n_j, \bar{m}^k_j)$. On pose $n = [n_j]_j \in N$. Vérifions que $n \models p$.

   Considérons $\varphi_i(x,[\bar{m}^i_j]_j) \in p$. Puisque p est finiment consistant, $\mathfrak{N} \models \exists x \bigwedge_{k \leq i} \varphi_k(x,[\bar{m}^k_j]_j)$. D'après le théorème de Łos,
   $$I = \{j < \omega : \mathfrak{M} \models \exists x \bigwedge_{k \leq i} \varphi_k(x, \bar{m}^k_j)\} \in \mathcal{U}.$$

Or, $J = \{j < \omega : k_j \geq i\} \supseteq I \setminus \{0, \dots, i-1\}$. Puisque $I \in \mathcal{U}$ et $\omega \setminus \{0, \dots, i-1\} \in \mathcal{U}$, on a $J \in U$. Ainsi

$$J \subseteq \{j < \omega : \mathfrak{M} \models \bigwedge_{k \leq i} \varphi_k(n_j, \bar{m}_j^k)\} \in \mathcal{U}.$$

D'après le théorème de Łos, $\mathfrak{N} \models \bigwedge_{k \leq i} \varphi_k([n_j]_j, [\bar{m}_j^k]_j)$. En particulier, $\mathfrak{N} \models \varphi_i([n_j]_j, [\bar{m}_j^i]_j)$. Ainsi $\mathfrak{N}$ est $\aleph_1$-saturé.

2. Soient $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ dénombrables, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur ω. Alors $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$ et $\prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U}$ sont $\aleph_1$-saturés, et donc de cardinal au moins $\aleph_1$. Puisque $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dénombrables, $\prod_\omega \mathfrak{M}$ et $\prod_\omega \mathfrak{N}$ sont de cardinal $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ainsi $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$ et $\prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U}$ sont deux modèles saturés de cardinal $\aleph_1$. De plus,

$$\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N} \equiv \prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U}.$$

Donc $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$ et $\prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U}$ sont isomorphes.
Réciproquement, si $\prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U}$ et $\prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U}$ sont deux ultraproduits isomorphes, alors

$$\mathfrak{M} \equiv \prod_\omega \mathfrak{M}/\mathcal{U} \equiv \prod_\omega \mathfrak{N}/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{N}.$$

Exercice 3. Un semigroupe est un ensemble S avec un produit associatif $S^2 \to S$ (donc un groupe possiblement sans élément neutre ou inverses). Un element $s \in S$ est *idempotent* si $s^2 = s$.

1. Montrer que si S est un semigroupe fini et $s \in S$, alors une puissance de s est idempotent.

Soit maintenant $S(K)$ un semigroupe algébrique définissable dans un corps algébriquement clos, c'est-à-dire S est un ensemble définissable sans quanteurs, et le produit est donné par une fonction rationnelle, les deux avec paramètres.

2. Si $K = \tilde{\mathbb{F}}_p$ est la clôture algébrique du corps à p éléments, montrer qu'il existe n_0 tel que $S(\mathbb{F}_{p^n})$ est un semigroupe dès que $n_0|n$. En déduire que $S(K)$ a un idempotent.
3. En déduire que $S(K)$ a un idempotent, quel que soit le corps K algébriquement clos.

Solution.

1. On considère les puissances $\{s^i : i < \omega\} \subseteq S$. Comme S est fini, il y a $i, j < \omega$ avec $j > 0$ et $s^i = s^{i+j}$. Soit n un mupltiple de j plus grand que i. Alors

$$s^n = s^{n-i}s^i = s^{n-i}s^{i+j} = \cdots = s^{n-i}s^{i+n} = s^{2n}$$

et s^n est idempotent. (Si $n = i$, on supprime le facteur s^{n-i}.)

2. Soit n_0 tel que tous le paramètres pour définir S et la fonction rationnelle qui donne le produit sont dans $\mathbb{F}_{p^{n_0}}$. Alors si $n_0|n$, on a $\mathbb{F}_{p^{n_0}} \leq \mathbb{F}_{p^n}$ et S et le produit sont définis sur $\mathbb{F}_{p^n}$. Ainsi pour $x, y \in S(\mathbb{F}_{p^n})$ on a $x \cdot y \in S(\mathbb{F}_{p^n})$, et $S(\mathbb{F}_{p^n})$ est un sous-semigroupe de $S(\tilde{\mathbb{F}}_p)$. Or, $\mathbb{F}_{p^n}$ est fini, et $S(\mathbb{F}_{p^n})$ l'est aussi. D'après la partie 1. il y a un idempotent $s \in S(\mathbb{F}_{p^n})$, et s est un idempotent de $S(\tilde{\mathbb{F}}_p)$.

3. Fixons une formule $S(x, \bar{a})$ et une fonction rationnelle $f(x, y, \bar{a})$, les deux définissables avec paramètres $\bar{a}$. Le fait que $f(.,., \bar{a})$ est une fonction associative qui envoit $S(., \bar{a})^2$ dans $S(., \bar{a})$ est une formule $\theta(\bar{a})$ dans le langage des anneaux. D'après la partie 2. pour tout premier $p > 0$ on a

$$\tilde{\mathbb{F}}_p \models \forall \bar{z}\, [\theta(\bar{z}) \to \exists x\, (S(x, \bar{z}) \wedge f(x, x, \bar{z}) = x)].$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers. D'après le théorème de Łos,

$$\prod_p \tilde{\mathbb{F}}_p/\mathcal{U} \models \forall \bar{z}\, [\theta(\bar{z}) \to \exists x\, S(x, \bar{z}) \wedge f(x, x, \bar{z}) = x].$$

Or, $\prod_p \tilde{\mathbb{F}}_p/\mathcal{U}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Comme la théorie des corps algéb riquement clos de caractéristique donné est une théorie complète, cette formule est vraie dans tout corps algébriquement clos, et tout semigroupe algébrique sur un tel corps a un élément idempotent.