Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2011/2012
Master 1 — Introduction à la logique mathématique[1]

Théorie des ensembles
Feuille 1.

Exercice 1 (Ensembles)

1. Montrer que si x et y sont des ensembles, la paire (x, y) en est un.
2. Montrer que si X et Y sont des ensebmbles, alors le produit cartésien $X \times Y$ en est un.

Exercice 2 (L'axiome de fondation)

On rappelle que l'axiome de fondation est l'énoncé suivant : pour tout ensemble non vide x, il existe un ensemble $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$. Vérifier que cet axiome interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n<\omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n.

Exercice 3 (Bons ordres et chaînes descendantes)

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné.

1. On suppose que $(X, <)$ un bon ordre. Montrer qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de X.
2. On suppose que $(X, <)$ ne contient pas de suite infinie strictement décroissante. Montrer que $(X, <)$ est un bon ordre.

Exercice 4 (Bons ordres et anti-bons ordres)

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que si $(X, <)$ est un bon ordre et $(X, >)$ est un bon ordre alors X est fini.

Exercice 5 (Bons ordres et segments initiaux)

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Notons I_X l'ensemble des segments initiaux propres de X et $\sigma : X \to I_X$ l'application qui à $x \in X$ associe le segment initial strict $S_x = \{y \in X | y < x\}$.

1. Vérifier que σ est injective.
2. Montrer que σ est surjective si et seulement si $(X, <)$ est un bon ordre.
3. Que peut-on dire de X si pour tout $x \in X$, $x = S_x$?

Exercice 6 (Quelques propriétés élémentaires sur les ordinaux.)

1. Montrer que l'intersection d'un ensemble X d'ordinaux est le plus petit élément de X.
2. Montrer que tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (la décrire).
3. Montrer qu'un ordinal α est un entier naturel (i.e. un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
4. Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si $\alpha = \sup\{\beta : \beta \in \alpha\}$.

1. Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~wagner/M1RLogique/M1RLogique.html`

5. Soit $(I, \leq)$ un ordre total et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés telle que X_i est un segment initial de X_j pour tout $i < j$. Soit $X = \cup_{i \in I} X_i$. Montrer qu'il existe une unique façon d'ordonner X telle que chaque X_i soit un segment initial de X. Soit la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'ordinaux telle que X_i est isomorphe à λ_i pour chaque $i \in I$. Montrer que X est isomorphe à la borne supérieure de $\{\lambda_i : i \in I\}$.
6. Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à α.
7. En déduire que si A et B sont deux ensembles bien ordonnés tel que A se plonge dans B (i.e. il existe une injection croissante de A dans B) alors $A \preceq B$.

Exercice 7 (Plongements de bons ordres)
Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \to Y$ telle que pour tout $x, x' \in X$ on a $f(x) < f(x')$ si et seulement si $x < x'$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 8 (Induction ordinale)

1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété telle que pour tout ordinal α, si $\mathcal{P}(\beta)$ est vraie pour tous les $\beta < \alpha$ alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie. Montrer que $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.
2. Soit $\mathcal{P}$ une propriété telle que
   – $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
   – pour tout ordinal α, si $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie alors $\mathcal{P}(S(\alpha))$ est vraie ;
   – pour tout ordinal limite λ, si $\mathcal{P}(\gamma)$ est vraie pour tout $\gamma < \lambda$ alors $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie.
   Montrer que $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.

Exercice 9 (Somme ordinale)
Rappelons la définition par récurrence transfinie de la somme de deux ordinaux α et β :

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0 \\ S(\alpha + \gamma) & \text{si } \beta = S(\gamma) \\ \sup\left(\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire une opération sur les bons ordres qui est équivalente :

1. Soient A et B deux ensembles bien ordonnés. Montrer que l'on peut supposer qu'ils sont disjoints.
2. On suppose maintenant$A \cap B = \emptyset$ et on considère $X = A \cup B$. Montrer que l'on peut définir de manière unique un bon ordre sur X prolongeant celui de A et celui de B (i.e. tel que l'ordre de X induise ceux de A et de B) et tel que A soit un segment initial de X.
3. Montrer que si A et B sont respectivement isomorphes aux ordinaux α et β alors X est isomorphe à $\alpha + \beta$.
4. En déduire les propriétés suivantes de l'addition ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) monotonie stricte à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$;
   (d) régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$;

(e) non monotonie stricte à gauche et non régularité à droite ;

(f) $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.

Exercice 10 (Multiplication ordinale)
Rappelons la définition par récurrence transfinie du produit de deux ordinaux α et β :

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ (\alpha \cdot \gamma) + \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

Soient deux ordinaux α et β, nous allons définir un bon ordre sur l'ensemble $\alpha \times \beta$ qui sera isomorphe à l'ordinal $\alpha \cdot \beta$:

1. On munit $\alpha \times \beta$ de l'ordre (anti-)lexicographique suivant

$$(\gamma_1, \delta_1) < (\gamma_2, \delta_2) \text{ ssi } \delta_1 < \delta_2 \text{ ou } (\delta_1 = \delta_2 \;\&\; \gamma_1 < \gamma_2).$$

   Montrer que cela définit un bon ordre sur $\alpha \times \beta$.
2. Montrer que ce bon ordre est isomorphe à l'ordinal $\alpha \cdot \beta$.
3. En déduire les propriétés suivantes de la multiplication ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) si $\alpha > 0$ et $\beta < \gamma$ alors $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$;
   (d) si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;
   (e) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

Exercice 11 (Soustraction et division euclidienne sur les ordinaux)

1. Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
   - $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$;
   - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

   Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2. Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
   (Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 12 (Puissance ordinale)
Rappelons la définition par récurrence transfinie de $\alpha > 0$ à la puissance β :

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\left\{\alpha^\xi \colon \xi < \beta\right\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

1. Vérifiez les propriétés suivantes pour $\alpha > 0$, β et γ trois ordinaux :
   – si $\alpha > 1$ et $\beta > \gamma$ alors $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$;
   – $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;

– $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

2. Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^{β} est aussi dénombrable [2].
3. Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^{\xi}$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^{\omega}$?

Exercice 13 (Développement de Cantor)

Le développement de Cantor d'un ordinal est son développement en base ω. Il s'agit ici de vérifier qu'un tel développement existe, c'est-à-dire de montrer que tout ordinal α non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m,$$

où $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m$ sont des ordinaux et $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers non nuls.

1. Montrer que $\omega^{\alpha} \geq \alpha$ pour tout α.
2. Montrer que pour tout α il existe un unique couple (α_1, n_1) tel que
$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1).$$
3. En déduire qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \beta_1$.
4. En itérant le procédé (ou de manière équivalente par induction), montrer l'existence du développement de Cantor.
5. Vérifier l'unicité.
6. Donner un critère de comparaison de deux ordinaux α et β connaissant leurs développements de Cantor.
7. Montrer que les ordinaux de la forme ω^{α} sont les ordinaux β tels que $\gamma + \beta = \beta$ pour tout $\gamma < \beta$.
8. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant les développements de Cantor de α et β. (On donnera des exemples).
9. En utilisant les développements de Cantor, définir une nouvelle fonction somme, notée $\oplus$, sur les ordinaux qui soit commutative, associative et simplifiable (ou régulière, i.e. si $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$ alors $\beta = \gamma$).

2. en particulier, α^{β} ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est le produit de *cardinaux*.