

**Théorie des ensembles**  
Feuille 4 – filtres et ultrafiltres.

**Exercice 1.** Soit  $X$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $X$ . Montrer que si  $\mathcal{F}$  contient un ensemble fini alors  $\mathcal{F}$  est principal.

**Exercice 2.** Soit  $X$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $X$ . Montrer que exactement l'une des deux possibilités suivantes est vraie :

- $\mathcal{U}$  n'est pas principal, et contient le filtre de Fréchet.
- $\mathcal{U}$  est principal, et il existe un (unique)  $x \in X$  tel que  $\mathcal{U} = \langle \{x\} \rangle = \{A \subseteq X : x \in A\}$ .

**Exercice 3.** Soit  $X$  un ensemble et  $\beta X$  l'ensemble des ultrafiltres sur  $X$ .

Pour une partie  $A \subseteq X$ , soit  $A' \subseteq \beta X$  l'ensemble des ultrafiltres qui contiennent  $A$ .

1. Montrer que  $A' \cap B' = (A \cap B)'$ ,  $A' \cup B' = (A \cup B)'$  et  $(X \setminus A)' = \beta X \setminus A'$ .
2. Montrer que  $\{A' : A \subseteq X\}$  est la base d'une topologie compacte, totalement discontinue sur  $\beta X$ .
3. Montrer que les ouvert-fermés de  $\beta X$  sont exactement les  $A'$ .
4. Montrer qu'un ultrafiltre  $u \in \beta X$  est topologiquement isolé si et seulement si c'est un ultrafiltre principal.
5. D'après l'exercice précédent nous pouvons identifier  $X$  avec la partie de  $\beta X$  qui consiste en les ultrafiltres principaux. Montrer que sous cette identification,  $X$  est une partie discrète et dense de  $\beta X$ .

**Exercice 4.** Soit  $(I, \leq)$  un ordre partiel *filtrant*, c.à.d. que pour tous  $i, j \in I$  il existe  $k \in I$  tel que  $k \geq i, j$ . (Par exemple : parties finies de  $X$  avec inclusion ; les voisinages d'un point  $x$  dans un espace topologique, avec l'inclusion inverse ; ...)

Pour  $i \in I$ , posons  $I_i = \{j \in I : j \geq i\}$ . Montrer que  $\mathcal{A} = \{I_i : i \in I\}$  est une base de filtre. Caractériser les membres du filtre engendré.

**Exercice 5.** Soit  $X$  un espace topologique. Montrer que  $X$  est séparé si et seulement si un filtre sur  $X$  admet au plus une limite.

**Exercice 6.** Soit  $X$  un espace topologique et  $I$  un ensemble d'indice. Une  $I$ -suite dans  $X$  est simplement un membre de  $X^I$ , notée  $\{x_i\}_{i \in I}$ . Soit aussi  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $I$ .

Nous disons que la suite  $\{x_i\}$  converge vers  $y \in X$  modulo  $\mathcal{F}$ , en symboles

$$x_i \xrightarrow{i \rightarrow \mathcal{F}} y,$$

si pour tout voisinage  $V \ni y$  nous avons

$$\text{pour tout voisinage } V \ni y : \quad \{i : x_i \in V\} \in \mathcal{F}.$$

1. Considérons l'application  $x : I \rightarrow X$ ,  $x : i \mapsto x_i$ . Montrer que  $x_i \xrightarrow{i \rightarrow \mathcal{F}} y$  si et seulement si le filtre image  $x.(\mathcal{F})$  converge en  $y$ .
2. Soit  $\mathcal{F}$  le filtre de Fréchet sur  $\mathbb{N}$  et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Montrer que  $x_n \rightarrow y$  dans le sens ordinaire si et seulement si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \mathcal{F}} y$ .

**Exercice 7.** Soit  $X$  un espace topologique compact, et  $I$  un ensemble. Soit  $\{x_i\}_{i \in I}$  une  $I$ -suite dans  $X$ .

1. Montrer que pour tout ultrafiltre  $u \in \beta I$ , la limite  $\lim_{i \rightarrow u} x_i$  existe (et est unique).
2. Montrer que l'application  $u \mapsto \lim_{i \rightarrow u} x_i$  est une application continue de  $\beta I$  dans  $X$ .
3. Montrer que c'est l'unique application continue qui étend  $x : i \mapsto x_i$  (quand on identifie  $I$  avec les ultrafiltres principaux dans  $\beta I$ ).