Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020

Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles

Feuille 5.

Exercice 1. Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute L-structure satisfait $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 2. Toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi$ où les Q_i sont des quanteurs et φ est une formule sans quanteurs.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbf{N}, \cdot \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 4. Montrer que l'ordre sur $\mathbf{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$.

Exercice 5. Supposons que $\mathcal{M}$ est une L-structure finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

1. Montrer que $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$ (c'est à dire $|M| = |N|$, les ensembles sous-jacents ont le même cardinal).
2. (optionnel) Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes : $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$. (c'est assez dur de faire directement et potentiellement inutile, car plus tard on verra une méthode bien plus simple).

Exercice 6. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. On rappelle que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ($\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$) si $M \subseteq N$ (inclusion des ensembles sous-jacents) et l'interprétation de chaque symbole dans M est la restriction de son interprétation dans $\mathcal{N}$.

Montrer que les sont équivalents :

1. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.
2. $M \subseteq N$, et pour chaque formule atomique $\varphi(\bar{x})$ et $\bar{a} \in M$ de la bonne longueur :
$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}).$$
3. $M \subseteq N$, et pour chaque formule sans quanteurs $\varphi(\bar{x})$ et $\bar{a} \in M$ de la bonne longueur :
$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}).$$
(Notez bien le sens de l'implication !)

Exercice 7. Soit $\mathcal{M}$ une structure et $A \subseteq M$. Sont équivalents :

1. Il existe une sous-structure $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ tel que $N = A$. Cette sous-structure est d'ailleurs unique.
2. L'ensemble A est clos par les fonctions de $\mathcal{M}$.

Informellement, on dira dans ce cas que A est une sous-structure de $\mathcal{M}$.

Exercice 8.

1. Montrer que si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie,.

Exercice 9. Soient $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$. Montrer que

1. $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_3$.
2. $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$.

Exercice 10. Soit $(I, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une *chaîne* de L-structures ($\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors la réunion $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, est munie canoniquement d'une L-structure, notée $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$, qui satisfait pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$.

Exercice 11. Soit $(I, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une *chaîne élémentaire* de L-structures ($\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Alors $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}$ pour tout $i \in I$.

Exercice 12. Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont ∞-équivalents et donc élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

Exercice 13. Soit K un corps. On considère $L_K = \{0, +, m_k : k \in K\}$ le langage des K-espaces vectoriels, m_k étant la fonction unaire de multiplication par k. Soient E et F deux K-espaces vectoriels vus comme L_K-structures. Montrer que si E et F sont de dimension infinie alors ils sont ∞-équivalents.

Exercice 14. Montrer que la relation d'∞-équivalence est bien une relation d'équivalence.

Exercice 15.

1. Soit K un corps algébriquement clos. Montrer que pour tout sous-corps k fini ou dénombrable de K, la clôture algébrique de k est dénombrable.
2. Soit K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique et non dénombrables. Montrer que K_1 et K_2 sont ∞-équivalents.

Exercice 16. La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Même question avec la théorie des corps infinis.

Exercice 17.

1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémité. Montrer que cette théorie est complète.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies. Montrer que cette théorie est complète.
3. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies. Montrer que cette théorie est complète.

Exercice 18. Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\varphi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\mathcal{M} \models \varphi(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathcal{M}$ strictement compris entre a et b.
3. Soit $\mathcal{N}$ la L-structure $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire tel que
$$(a, m) <^{\mathcal{N}} (b, n) \text{ si et seulement si } a < b \text{ ou } (a = b \text{ et } m < n).$$
Soit $\mathcal{M}$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$. En utilisant la méthode de va-et-vient infini, montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.
4. On considère $\mathcal{N}'$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}) \cup ((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times 2\mathbf{Z})$. Que peut-on dire de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}'$, et de $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}$?
5. Si $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$ sont trois structures tel que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$, a-t-on nécessairement $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$?