Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 6.

Dans les exercices suivants nous décortiquons la construction de l'ultraproduit (et de son cousin, le produit réduit).

Exercice 1. Soit I un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Pour chaque $i \in I$, soit M_i un ensemble. On pose $N = \prod_i M_i$.

Pour $a, b \in N$, on définit $a \sim b$ (ou $a \sim_{\mathcal{F}} b$) si

$$\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{F}.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Dans la suite, on note

$$\overline{N} = N/\sim = \big\{[a] : a \in N\big\}.$$

Exercice 2. Continuant l'exercice précédent, supposons que pour chaque $i \in I$ on ait une relation $R_i \subseteq M_i^k$. Posons

$$R = \Big\{(a, b, \dots) \in N^k : \big\{i : (a_i, b_i, \dots) \in R_i\big\} \in \mathcal{F}\Big\}.$$

Montrer que R est $\sim$-invariant : si $a \sim a'$, $b \sim b'$ et ainsi de suite, alors

$$(a, b, \dots) \in R \iff (a', b', \dots) \in R.$$

Ainsi, nous pouvons définir

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \Big\{\big([a], [b], \dots\big) \in \overline{N}^k : (a, b, \dots) \in R\Big\}\\ &= \Big\{\big([a], [b], \dots\big) \in \overline{N}^k : \big\{i : (a_i, b_i, \dots) \in R_i\big\} \in \mathcal{F}\Big\},\end{aligned}$$

sans que cela ne dépende du choix des représentants.

Exercice 3. C'est quoi R lorsque chaque R_i est l'égalité de M_i ? Et c'est quoi $\overline{R}$ dans ce cas ? Les connaissons-nous déjà sous un autre nom ?

Exercice 4. Continuant l'exercice précédent, supposons que pour chaque $i \in I$ on ait une fonction $f_i \subseteq M_i^k \to M_i$. Posons

$$f \colon N^k \to N, \qquad f(a, b, \dots) = \big(f_i(a_i, b_i, \dots) : i \in I\big).$$

Montrer que f est $\sim$-invariant : si $a \sim a'$, $b \sim b'$ et ainsi de suite, alors

$$f(a, b, \dots) \sim f(a', b', \dots).$$

Ainsi, nous pouvons définir

$$\begin{gathered}\overline{f} : \overline{N}^k \mapsto \overline{N},\\ \overline{f}\big([a], [b], \dots\big) = \big[f(a, b, \dots)\big] = \big[f_i(a_i, b_i, \dots) : i \in I\big],\end{gathered}$$

sans que cela ne dépende du choix des représentants.

Exercice 5. Conclusion : Soit I un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Pour chaque $i \in I$, soit $\mathcal{M}_i$ un une L-structure. Alors il existe une L-structure $\overline{\mathcal{N}}$ dont l'ensemble sous-jacent est

$$\overline{N} = \prod M_i/\sim,$$

telle que pour chaque symbole de relation k-aire R on ait :

$$\overline{\mathcal{N}} \vDash R\big([a],[b],\ldots\big) \iff \big\{i : \mathcal{M}_i \vDash R(a_i,b_i,\ldots)\big\} \in \mathcal{F},$$

et pour chaque symbole de fonction k-aire f on ait :

$$f^{\overline{\mathcal{N}}}\big([a],[b],\ldots\big) = \big[f^{\mathcal{M}_i}(a_i,b_i,\ldots)\big].$$

En particulier, aucun des deux ne dépend du choix des représentants.

Lorsque $\mathcal{F}$ n'est qu'un filtre, $\overline{\mathcal{N}} = \prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ (le produit des $\mathcal{M}_i$ modulo $\mathcal{F}$) est un *produit réduit*. Lorsque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ est un *ultraproduit*.

Exercice 6. Soit $\mathcal{M}$ une structure, I un ensemble, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$ l'ultrapuissance (càd l'ultraproduit de I copies de $\mathcal{M}$). On définit le *plongement diagonal*

$$f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$$
$$f(a) = [a,a,\ldots].$$

En d'autres mots, $f(a)$ est la classe d'équivalence de la suite constante $(a,a,\ldots) \in M^I$.

1. Montrer que f est injectif. Dans la suite, on identifiera f avec l'identité, et $a \in M$ avec $[a,a,\ldots] \in M^{\mathcal{U}}$.
2. Montrer que sous cette identification, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}^{\mathcal{U}}$.

Exercice 7. Si $\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, alors $\mathcal{M}^{\mathcal{U}} = \mathcal{M}$ (i.e., le plongement diagonal est un isomorphisme).

Exercice 8 (Plongement élémentaire)**.** Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Un *plongement élémentaire* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est une application $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ telle que pour chaque formule $\varphi(\bar{x})$ et $\bar{\in} M$ de la bonne longueur :

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \vDash \varphi\big(f(\bar{a})\big).$$

Monter qu'un plongement élémentaire $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est la même chose qu'un isomorphisme de $\mathcal{M}$ avec une sous-structure élémentaire $\mathcal{M}' \preceq \mathcal{N}$ (donc en particulier, c'est un plongement !)

Exercice 9 (Diagramme élémentaire)**.** On continue l'exercice précédent. Soit $L(M) = L \cup \{c_m : m \in M\}$, c'est à dire L augmenté d'un symbole de constante pour chaque membre de M. Donner une $L(M)$-structure revient à donner une L-structure $\mathcal{N}$, ainsi qu'une application $f\colon M \to N$. On notera la $L(M)$-structure correspondante $\mathcal{N}_f$, de sorte que $c_m^{\mathcal{N}_f} = f(m)$.

En particulier, $\mathcal{M}_{\mathrm{id}}$ est une $L(M)$-structure canonique, et on aura tendance à omettre le id. Soit $T(M) = \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$ (c'est le *diagramme élémentaire de* M).

Montrer qu'une application $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un plongement élémentaire si et seulement si $\mathcal{N}_f \vDash T(M)$. Informellement, on dira que les plongements élémentaires de $\mathcal{M}$ sont exactement les modèles de sont diagramme élémentaire $T(M)$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Supposons que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

1. Chaque $\varphi \in T(M)$ est un énoncé de $L(M)$.
2. Pour chaque $\varphi \in T(M)$ il existe une application $f_\varphi \colon M \to N$ tel que $N_{f_\varphi} \models \varphi$.
3. Pour chaque $\varphi \in T(M)$, soit $A_\varphi \subseteq T(M)$ l'ensemble de $\psi \in T(M)$ tel que φ soit une conséquence logique de ψ. Alors il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur $T(M)$ tel que
$$\mathcal{F} \supseteq \big\{A_\varphi : \varphi \in T(M)\big\}.$$
4. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $T(M)$ ayant la même propriété.
5. Définissons $f \colon M \to N^{\mathcal{U}}$ par :
$$f(m) = \big[f_\varphi(m) : \varphi \in T(M)\big].$$
Alors $(\mathcal{N}^{\mathcal{U}})_f = \prod_\varphi(\mathcal{N}_{f_\varphi})$, et c'est un modèle de $T(M)$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures. Sont équivalents :

1. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$
2. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{M}$ admet un plongement élémentaire $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}^{\mathcal{U}}$.

Exercice 12. Si $\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Exercice 13. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.

Exercice 14. Montrer que pour une théorie T, sont équivalents :

1. T est finiment axiomatisable (i.e., admet un ensemble fini d'axiomes).
2. T admet un ensemble d'axiomes consistant en un seul énoncé.
3. Pour tout système d'axiomes Σ pour T il existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ fini qui axiomatise T.

Exercice 15. Soit L un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage contenant θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1, soit modèle de T_2 mais jamais des deux théories. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Exercice 16. On considère le langage $L = \{E\}$ où E est une relation binaire.

1. Existe-t-il une théorie dans le langage L dont les modèles sont exactement les relations d'équivalence n'ayant que des classes finies sur un ensemble infini ?
2. Existe-t-il une théorie dans le langage L dont les modèles sont exactement les relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes sur un ensemble infini ?
3. La théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes, toutes infinies, est-elle finiment axiomatisable ?

Exercice 17.

1. Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de L_{gp}-formules tel que dans tout groupe G un élément g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.
2. Peut-on axiomatiser les groupes de torsion ?

Exercice 18. Soit L un langage fini ou dénombrable et soit T une théorie dans le langage L.

1. Montrer que si T a un modèle infini alors T a un modèle de cardinalité κ pour tout cardinal infini κ.
2. Soit κ un cardinal infini. Montrer que si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ (on dit qu'une telle théorie est *κ-catégorique*) et n'a pas de modèle fini alors T est complète.
3. Montrer que la théorie des ordres totaux denses sans extrémité est $\aleph_0$-catégorique. Est-elle $\aleph_1$-catégorique ?
4. Soit $L_{\mathbf{Q}} = \{0, +, \lambda_q : q \in \mathbf{Q}\}$ le langage des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels et T la théorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels dans ce langage. Pour quels cardinaux κ, T est-elle κ-catégorique ?
5. Soit p un nombre premier, $L_{\mathbf{F}_p} = \{0, +, \lambda_k : k \in \mathbf{F}_p\}$ le langage des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels et T la théorie des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels infinis dans ce langage. Pour quels cardinaux κ, T est-elle κ-catégorique ?
6. Soit p un nombre premier ou soit $p = 0$. Pour quels cardinaux κ, la théorie CAC_p des corps algébriquement clos de caractéristique p est-elle κ-catégorique ?
7. Pour quels cardinaux κ, la théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes, toutes infinies, est-elle κ-catégorique ?
8. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.
   (a) Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
   (b) La théorie T est-elle complète ?

Exercice 19. Soit L un langage fini et T une théorie dans le langage L. Montrer que si dans tous les modèles de T les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies, alors il y a une fonction $f : \omega \to \omega$ telle que pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 20. Nous considérons un langage L comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires : $L = \{E_i | i < \omega\}$.

1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.
2. Montrer que la structure suivante est un modèle dénombrable des énoncés du premier point :

   $$\mathcal{M}_0 = \langle \{f \in 2^\omega \colon \text{il existe } i < \omega \text{ tel que pour tout } j \geq i,\ f(i) = f(j).\ \} \,;\, E_i(x_1, x_2)\ (i < \omega) \rangle\ ,$$

   où pour tout $i \in \omega$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in E_i^{\mathcal{M}_0}$ si et seulement si $\sigma_1 \lceil i = \sigma_2 \lceil i$.
   Le point 2 montre que les énoncés du premier point forment un ensemble consistant. Ces énoncés et leurs conséquences seront notés T.
3. Nous dirons qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tel que $\mathcal{M} \models E_i(a, b)$ pour tout $i < \omega$. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal que lui.
4. Montrer que deux modèles riches sont ∞-équivalents. En déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?