Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 7 – Espaces de types.

Soit T une théorie. On rappelle que

$$S_n(T) = \{\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})\colon \mathcal{M} \models T,\ \bar{a} \in M^n\}. \tag{1}$$

Ce sont tous des types en les variables libres $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Exercice 1 (Topologie sur l'espace des types)**.** Pour une formule $\varphi(\bar{x})$ on pose

$$[\varphi(\bar{x})] = \big\{p(\bar{x}) \in S_n(T) : \varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\big\}.$$

Parfois on omet le $\bar{x}$.

1. Montrer que la famille des ensembles $[\varphi]$ forme une base d'ouvert pour une topologie sur $S_n(T)$. Dans la suite, on munit toujours $S_n(T)$ de cette topologie.
2. Montrer que chaque $[\varphi]$ est ouvert-fermé.
3. Montrer que $S_n(T)$ est totalement discontinu.
4. Montrer que $S_n(T)$ est compact.
5. Montrer que tout ouvert-fermé de $S_n(T)$ est de la forme $[\varphi]$ pour une formule $\varphi(\bar{x})$.

Exercice 2 (Type isolé)**.** Un type $p \in S_n(T)$ est dit *isolé* s'il existe une formule φ telle que $[\varphi] = \{p\}$ (alors, φ *isole* p). Montrer que $p \in S_n(T)$ est un type isolé si et seulement si c'est un point isolé de l'espace topologique $S_n(T)$.

Exercice 3 (Type algébrique)**.** Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ et $p \in S_n(T)$. Supposons que pour chaque extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, il y a au plus un nombre fini de réalisations de p dans $\mathcal{N}$ (un tel type est dit algébrique).

1. Montrer qu'il existe une formule $\phi(\bar{x})$ dans $p(\bar{x})$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{M}$.
2. Montrer que toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ est déjà dans $\mathcal{M}$.
3. Soit $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ ayant un nombre fini m de solutions dans $\mathcal{M}$, et telle que m est minimal. Montrer que ϕ isole p, c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ.
4. Et si au lieu d'un type complet $p(\bar{x})$ on avait un type *partiel* $\pi(\bar{x})$?

On rappelle qu'étant donné une structure $\mathcal{M}$ et $A \subseteq M$:

$$S_n(A) = \{\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)\colon \mathcal{N} \succeq \mathcal{M},\ \bar{a} \in N^n\}. \tag{2}$$

Ceci dépend de $\mathcal{M}$ (et non seulement de A).

Nous avons un souci : la définition de $S_n(T)$ prend en compte tous les modèles de T, alors que pour des types au-dessus de A on ne considère que les extension élémentaires de $\mathcal{M}$.

Exercice 4 (Types avec et sans paramètres)**.** On rappelle que $L(A) = L \cup A$ (ou plus précisément $L \cup \{c_a : a \in A\}$, mais parfois on oublie cette distinction) et $T(A) = \mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$. Montrer que

$$S_n(A) = S_n\big(T(A)\big),$$

où $S_n\big(T(A)\big)$ est au sens de (1).