Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2019/2020
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 8 – Élimination des quanteurs.

Exercice 1 (Le critère du va-et-vient)**.** Soit T une théorie, ayant la propriété suivante :

> Pour tous $\mathcal{M},\mathcal{N} \models T$ et tous $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^n$ qui vérifient les mêmes formules sans quanteurs, il existe des extensions élémentaires $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{N}$, et un va-et-vient infini $\mathcal{F}$ entre $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ qui contient l'application $\bar{a} \mapsto \bar{b}$.

Alors T élimine les quanteurs.

SUMMARY of the argument in the notes, for ACF :

Step I : Prove that if Φ is a set of formulas, and any two n-tuples (in a model of T) that satisfy the same formulas from Φ have the same type, then every formula is equivalent (modulo T) to a Boolean combination of formulas from Φ.

Special case : Φ = quantifie-free formulas. If the condition holds, then every formula is equivelent modulo T to a qf formula, i.e., T has QE.

Step II : if K_1 and K_2 are ACF (alg clsd flds), and $\bar{a} \in K_1^n$ and $\bar{b} \in K_2^n$ satisfy the same qf formulas (equivalently : same atomic formulas), then there exist elementary extensions of K_1 and K_2, respectively, that correspond by a back-and-forth that sends $\bar{a}$ to $\bar{b}$.

My point : step II does not depend on T.

Assume the condition holds. By step I : enough to show that if $M, N \models T$ and $\bar{a} \in M^n$ and $\bar{b} \in N^n$ satisfy the same qf formulas, then they have the same type. By the condition there exist $M' \succeq M$ and $N' \succeq N$ and a back-and-forth $\mathcal{F}$ between M' and N' that contains $\bar{a} \mapsto \bar{b}$.

Recall :

> if $\mathcal{F}$ is a back-and-forth between M and N and $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ belongs to $\mathcal{F}$ then $\bar{a}$ and $\bar{b}$ satisfy the same formulas. In other words they have the same type : $\mathrm{tp}^M(\bar{a}) = \mathrm{tp}^N(\bar{b})$.
> MUST REMEMBER THIS – fundamental fact about b& f!

Put together : we have

$$\mathrm{tp}^M(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{M'}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{N'}(\bar{b}) = \mathrm{tp}^N(\bar{b})$$

(since $M' \succeq M$ and $N' \succeq N$).

And we are done. COMPARE THIS with the proof of QE for ACF in the notes (and in class??)

How to apply the criterion to ACF?

Just take $M' \succeq M$ which is large enough to have infinite transcendence degree. Same for $N' \succeq N$. And recall (seen in class) :

> Two ACF of same characteristic and infinite tr.deg. correspond by a back and forth consisting of all finite partial isomorphisms.

In particular, we can choose the elementary extensions without necessarily knowing $\bar{a}$ and $\bar{b}$! This is completely normal, see remk no. 2.

On pourrait remarquer que :

1. C'est exactement le critère utilisé das les note du cours pour démontrer que la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs.
2. Au fait (mais on ne le démontre pas encore), si T élimine les quanteurs, alors une version légèrement plus forte du critère est vraie :

   Pour tous $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$, il existe des extensions élémentaires $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}' \succeq \mathcal{N}$, et un va-et-vient infini $\mathcal{F}$ entre $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$, tel que pour tous $\bar{a} \in M'^n$, $\bar{b} \in N'^n$ qui vérifient les mêmes formules sans quanteurs, $\mathcal{F}$ contient l'application $\bar{a} \mapsto \bar{b}$.

   Ainsi, le critère est nécessaire est suffisant ; mais pour cela il faudra parler de modèles saturés de T.

Exercice 2. Soit ACF la théorie des corps algébriquement clos. Pour p premier, soit :

$$ACF_p = ACF \cup \{p = 0\},$$

dans lequel p est $1 + \ldots + 1$, p fois. Posons aussi

$$ACF_0 = ACF \cup \{p \neq 0 : p \text{ premier}\}.$$

1. Montrer que pour p premier ou nul, les modèles de ACF_p sont exactement les corps algébriquement de caractéristique p.
2. Montrer que chaque théorie ACF_p est complète.
3. Réciproquement, montrer que toute complétion de ACF (c.à.d., théorie complète qui contient ACF) est de la forme ACF_p pour p premier ou nul.

Exercice 3.

1. Décrire l'espace topologique $S_0(ACF)$.
2. Décrire l'espace topologique $S_1(ACF_p)$ pour p premier ou nul.
3. Soit K un corps, $L = K^a$ sa clôture algébrique. Décrire l'espace topologique $S_1(K)$. Hélas cette notation est ambiguë : on y entends, les types, dans le sens du corps algébriquement clos L, avec paramètres dans K.

Exercice 4.

1. Donner des axiomes pour la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies, dans le langage $L = \{E\}$.
2. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?
3. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
4. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?
5. Se convaincre que $S_n(T)$ est fini pour tout n.

Sufficient conditions to prove that a theory is complete ? (i.e., that all models of T are elementarily equivalent)

1. Show that any two models of T correspond by a back and forth.
2. If T is κ-categorical for some infinite $\kappa \geq |L|$ and has no finite models.

In this special case all criteria apply.

1. (sketch) let M and N be two models of T. Let $\mathcal{F}$ consist of all finite partial isomorphisms. Then $\mathcal{F}$ is a back-and-forth : if we want to add a new class, we can (infinitely many classes), and if we want to add a new element to a known class, we can (each class is infinite).

2. T is $\aleph_0$-categorical : a countable model of T consists of $\aleph_0$ classes of size $\aleph_0$ each. And T has no finite models.

Prove QE : using the back-and-forth criterion Let $M, N \models T$. Let $\bar{a} \in M^n$ and $\bar{b} \in N^n$ satisfy the same qf formulas. Let $\mathcal{F}$ consist of all finite partial isomorphisms. Then $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ is in $\mathcal{F}$ and as "checked" earlier $\mathcal{F}$ is a back-and-forth.

Notice that we can take $M' = M \succeq M$ and $N' = N$! So the criterion holds in a "strong" form.

Describe types :

Atomic formulas are : xEy, $x = y$

— $S_1(T) = \{\text{singleton}\}$
  Say $a \in M \models T$ and $b \in N \models T$. What are the atomic formulas that a satisfies ? $a = a$, aEa And b ? The same Do they satify the same atomic formulas ? yes Do they satify the same qf formulas ? yes.
  So $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$
— $|S_2(T)| = 3$ Say $\bar{a} = (a_0, a_1) \in M^2 \models T$
  What are the atomic formulas that $\bar{a}$ satisfies ? $a_0 = a_0$, a_0Ea_0, same for a_1. Left to check $a_0 = a_1$ and a_0Ea_1 (because they are symmetric)
  3 possibilities : yes yes , no yes, and no no. (type of (a, a), or type of distinct equivalent a_0, a_1 or the type of inequivalent a_0, a_1).
— $S_3(T) =$?.... we can do this.
— $|S_n(T)| \leq 3^{\binom{n}{2}}$ (any two elements have three possibilities, and this determines everything).

As you will see : Ryll-Nardzewski's Theorem asserts that if T is complete in a countable language, then T is $\aleph_0$-categorical iff $|S_n(T)|$ is finite for all n.

Exercice 5. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. On a vu dans la feuille 6 que T est complète. En vous inspirant de la preuve de la complétude, montrer que T élimine les quantificateurs. Décrire $S_1(T)$. Est-ce que tous les types de $S_1(T)$ sont réalisés dans chacun des modèles de T ?

Each P_i is a unary relation, i.e., a subset of the model. In other words any $M \models T$ is equipped with a family of infinite disjoint subsets.

This theory is *not* $\aleph_0$-categorical. A countable model can have any number (finite or countable) of elements not satisfying *any* P_i.

Let us prove QE using the back-and-forth criterion. Take $M, N \models T$, and $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^n$ that satisfy the same qf formulas.

Example of such M, N that do not admit an infinite b & f at all ? ? If M has some elements which satisfy no P_i, and N has none, then no (take an element in M that satisfies no P_i, it is impossible to find a corresponding element in N !)

1. Show that if $M, N \models T$ and both have infinitely many elements which do not satisfy any P_i, then the set of all finite partial isomorphisms is a b & f.

   Proof : we did more complicated earlier.

2. Show if $M \vDash T$ then there exists $M' \succeq M$ with infinitely many elements not satisfying any P_i.

   Hint : Let U be an ultrafilter on $\mathbf{N} = \aleph_0 = \omega$, and $M' = M^U$.

   We already know that $M \preceq M^U$ (we called this the diagonal embedding) How to find infinitely many distinct elements in M^U with no colour ?

   Idea (looks easy to me...) : choose a_i in P_i (think of P_i as a subset) for each $i \in \mathbf{N}$. Let

$$b_n = [a_{i+n} : i \in \mathbf{N}] \in M^U.$$

   If $i \neq j$ then $a_i \neq a_j$ (different colour). So, if $m \neq n$, then $a_{i+n} \neq a_{i+m}$ for all i, so (by definition) $b_n \neq b_m$. Also, for any $j \in \mathbf{N}$ and $n \in \mathbf{N}$, we have $a_{i+n} \in P_j$ for *at most* one i, so $b_n \notin P_j$. In other words $\{b_n : n \in \mathbf{N}\}$ is an infinite set of uncoloured elements of M^U.

3. Conclude : Take $M, N \vDash T$, and $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^n$ that satisfy the same qf formulas.

   Then $M \preceq M^U$, $N \preceq N^U$. The set $\mathcal{F}$ of all finite partial isomorphisms between M^U and N^U is a back-and-forth. And $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ is in $\mathcal{F}$.

Where does the hint come from ? First, the exact criterion for QE :

> T has QE iff any for two $\aleph_0$-*saturated* models of T the finite partial isomorphisms are a back-and-forth.

Second : if U is a (non principal) ultrafilter on $\mathbf{N}$, then M^U is $\aleph_0$-saturated (even $\aleph_1$-saturated).

The hint follows even if you do not know that it means to be κ-saturated !

Roughly : saturation is "everything that can happen does happen". So there should be lots of uncoloured elements, now a question of finding them...

$$S_1(T) = \{\text{all colours}\} \cup \{\text{no colour}\} = \{p_i : i \in \mathbf{N}\} \cup \{q\} \cong \mathbf{N} \cup \{*\}.$$

Say $a \in M \vDash T$. What are the possibilities for $\mathrm{tp}(a)$? If $a \in P_i$ then the formula $P_i(x)$ (some would write it as $x \in P_i$, if you think of it as a set) isolates $\mathrm{tp}(a)$. If a has no colour, this also determined $\mathrm{tp}(a)$

[why ? the only atomic formula in a single x are $x = x$ and $P_i(x)$]

What is the topology ? Each $\{p_i\}$ is open. if $\{q\}$ is open, then the topology is discrete and not compact.

Exercice : show that the space $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ admits a unique compact Hausdorff topology in which $\mathbf{N}$ is discrete. It is the one-point compactification of $\mathbf{N}$, and $n \to *$ (in this topology) as $n \to \infty$ (in the usual sense)

This is the topology on $S_1(T)$ (since it is compact Hausdorff and the topology on $\{p_i : i \in \mathbf{N}\}$ is discrete).

Exercice 6. 1. Donner une axiomatisation de la théorie T des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.

2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?

3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.

4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x \; x < S(x) \wedge \neg \exists y (x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.

5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de cette théorie, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.

Exercice 7. On travaille dans le langage $L = \{<\}$. Soit DLO la théorie des ordre denses sans extrémités.

1. Montrer que DLO est complète et élimine les quanteurs.
2. En déduire que $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}, <) = DLO$ et $(\mathbf{Q}, <) \preceq (\mathbf{R}, <)$.
3. Soit $(M, <)$ un modèle de DLO. Montrer que toute partie définissable (avec paramètres) $D \subseteq M$ est une réunion finie de points et d'intervalles ouverts.

   Une (théorie d'une) structure ordonnée ayant cette propriété est dite *o-minimale*.
4. Montrer que, de surcroît : on peut le faire de sorte que les points et les extrémités (finies) des intervalles figurent parmi les paramètres.
5. Soient $(M, <) \subseteq (N, <)$ des modèles de DLO. Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ une formule, $\bar{a} \in M^m$, $\bar{b} \in N^n$. Montrer que s'il existe un $c \in N$, distinct de tous les b_j, tel que $\mathcal{N} \vDash \varphi(\bar{a}, \bar{b}, c)$, alors un tel c existe aussi dans M.