Université Claude Bernard Lyon 1 — Année 2019/2020
Master 1 — Introduction à la Logique mathématique

Partiel : Théorie des ensembles

Jeudi 27 février. Durée 2h. Les notes du cours sont autorisées.

Exercice 1. La dérivation de Hausdorff

Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.

1. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X compatible avec l'ordre $\leq$, c'est-à-dire tel que $\leq$ passe au quotient. Expliciter cette propriété. On définit alors $D(\sim)$ la relation sur X obtenue en posant

$$xD(\sim)y \Leftrightarrow \text{ il y a un nombre fini de } \sim\text{-classes entre celle de } x \text{ et celle de } y.$$

2. Montrer que $D(\sim)$ est une relation d'équivalence qui étend $\sim$ et qui est toujours compatible avec $\leq$.
3. Expliciter une construction par récurrence transfinie qui, partant de la relation triviale $\sim_0$ (c'est-à-dire $x \sim_0 y$ ssi $x = y$), permette de répéter l'opération D et ainsi de définir, pour tout ordinal α une relation d'équivalence $\sim_\alpha$ compatible avec $\leq$.
4. Que peut-on dire si on applique cette construction à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique ?
5. Montrer que pour tout ordinal α, la relation $\sim_\alpha$ admet une seule classe sur la puissance ordinale ω^α, mais plusieurs sur $\omega^{\alpha+1}$.

Exercice 2. Lemme de König

Un *arbre* est la donnée d'un ensemble S (les sommets) muni d'une relation binaire de succession immédiate et d'un sommet origne r (sa racine) tel que :

— r n'est successeur immédiat d'aucun autre sommet ;
— tout sommet autre que la racine est successeur immédiat d'un unique sommet ;
— tout sommet appartient à une branche partant de r (une suite finie de successeurs immédiats commençant par r).

On dit qu'un arbre est à *branchement fini* lorsque chacun des sommets n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats.

Montrer qu'un arbre infini qui est à branchement fini possède au moins une branche infinie. Quel axiome du choix avez-vous utilisé ?

Exercice 3.

1. Soient κ et λ_i pour $i \in I$ des cardinaux. Montrer que

$$\kappa^{\sum_I \lambda_i} = \prod_I \kappa^{\lambda_i}.$$

2. Supposons que λ est singulier. Montrer qu'il existe des cardinaux réguliers $\mu < \lambda$ et $\theta_i < \lambda$ pour $i < \mu$ tels que pour tout cardinal κ :

$$\kappa^\lambda = \big(\sup_i \kappa^{\theta_i}\big)^\mu.$$