Université Claude Bernard Lyon I — 2me semestre 2012/2013

Master 1 — Introduction à la logique mathématique [1]

Théorie des ensembles

Feuille 1.

Exercice 1. Ensembles

1. Montrer que si x et y sont des ensembles, la paire (x, y) en est un.
2. Montrer que si X et Y sont des ensebmbles, alors le produit cartésien $X \times Y$ en est un.

Exercice 2. Bons ordres et chaînes descendantes

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné.

1. On suppose que $(X, <)$ un bon ordre. Montrer qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de X.
2. On suppose que $(X, <)$ ne contient pas de suite infinie strictement décroissante. Montrer que $(X, <)$ est un bon ordre.

Exercice 3. Bons ordres et anti-bons ordres

On rappelle qu'un ordinal est *fini* si tous ses éléments sont des successeurs, et qu'un ensemble est *fini* s'il est en bijection avec un ordinal fini. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que si $(X, <)$ est un bon ordre et $(X, >)$ est un bon ordre alors X est fini.

Exercice 4. Bons ordres et segments initiaux

Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Notons I_X l'ensemble des segments initiaux propres de X et $\sigma : X \to I_X$ l'application qui à $x \in X$ associe le segment initial strict $X_{<x} = \{y \in X | y < x\}$.

1. Vérifier que σ est injective.
2. Montrer que σ est surjective si et seulement si $(X, <)$ est un bon ordre.
3. Si $(X, <)$ est un bon ordre, montrer que $S(X) = X \cup \{X\}$ porte un bon-ordre isomorphe à l'ordre donné par l'inclusion sur les segments initiaux de X.
4. Que peut-on dire de X si pour tout $x \in X$, $x = X_{<x}$?

Exercice 5. Quelques propriétés élémentaires sur les ordinaux.

1. Montrer que l'intersection d'un ensemble X d'ordinaux est le plus petit élément de X.
2. Montrer que tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (la décrire).
3. Montrer qu'un ordinal α est un entier naturel (i.e. un ordinal fini) si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
4. Montrer qu'un ordinal α est limite si et seulement si $\alpha = \sup\{\beta : \beta \in \alpha\}$.
5. Soit $(I, \leq)$ un ordre total et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés telle que X_i est un segment initial de X_j pour tout $i < j$. Soit $X = \cup_{i \in I} X_i$. Montrer qu'il existe une unique façon d'ordonner X telle que chaque X_i soit un segment initial de X. Soit la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'ordinaux telle que X_i est isomorphe à λ_i pour chaque $i \in I$. Montrer que X est isomorphe à la borne supérieure de $\{\lambda_i : i \in I\}$.

---

1. Page du cours : `http://math.univ-lyon1.fr/~wagner/M1RLogique/M1RLogique.html`

6. Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal inférieur ou égal à α.
7. En déduire que si A et B sont deux ensembles bien ordonnés tel que A se plonge dans B (i.e. il existe une injection croissante de A dans B) alors $A \preceq B$.

Exercice 6. Plongements de bons ordres

Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \to Y$ telle que pour tout $x, x' \in X$ on a $f(x) < f(x')$ si et seulement si $x < x'$.

1. Montrer que tout bon ordre dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 7. Induction ordinale

1. Soit $\mathcal{P}$ une propriété telle que pour tout ordinal α, si $\mathcal{P}(\beta)$ est vraie pour tous les $\beta < \alpha$ alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie. Montrer que $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.
2. Soit $\mathcal{P}$ une propriété telle que
   - $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
   - pour tout ordinal α, si $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie alors $\mathcal{P}(S(\alpha))$ est vraie ;
   - pour tout ordinal limite λ, si $\mathcal{P}(\gamma)$ est vraie pour tout $\gamma < \lambda$ alors $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie.

   Montrer que $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.

Exercice 8. L'axiome de fondation

On rappelle que l'axiome de fondation est l'énoncé suivant : pour tout ensemble non vide x, il existe un ensemble $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$. Vérifier que cet axiome interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n<\omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n.

Exercice 9. La hiérarchie cumulative On définit une hiérarchie d'ensembles (V_α) indexée par les ordinaux en posant :

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- Si α est limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1. Montrer que V_α est un ensemble transitif pour tout α.
2. Montrer que $\beta < \alpha$ ssi $V_\beta \in V_\alpha$, et que $\beta \leq \alpha$ ssi $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. Si x est un ensemble, on définit son *rang* $rg(x)$ en posant

$$rg(x) = \begin{cases} \text{le plus petit } \gamma \text{ tel que } x \in V_{\gamma+1} \text{ si un tel } \gamma \text{ existe.} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $rg(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α.
4. Montrer que l'axiome de fondation est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout ensemble x, il existe un ordinal γ tel que $x \in V_\gamma$.
5. Montrer que la classe $\bigcup_{\alpha \text{ un ordinal}} V_\alpha$ satisfait les axiomes de Zermelo-Fraenkel.