Université Claude Bernard Lyon 1 — 2nd semestre 201/2013
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Feuille 2.

Exercice 1. Somme ordinale Rappelons la définition par récurrence transfinie de la somme de deux ordinaux α et β :

$$\alpha+\beta=\begin{cases}\alpha & \text{si } \beta=0\\ S(\alpha+\gamma) & \text{si } \beta=S(\gamma)\\ \sup\left(\{\alpha+\xi\colon \xi<\beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite}\end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire une opération sur les bons ordres qui est équivalente :

1. Soient A et B deux ensembles bien ordonnés. Montrer que l'on peut supposer qu'ils sont disjoints.
2. On suppose maintenant$A\cap B=\emptyset$ et on considère $X=A\cup B$. Montrer que l'on peut définir de manière unique un bon ordre sur X prolongeant celui de A et celui de B (i.e. tel que l'ordre de X induise ceux de A et de B) et tel que A soit un segment initial de X.
3. Montrer que si A et B sont respectivement isomorphes aux ordinaux α et β alors X est isomorphe à $\alpha+\beta$.
4. En déduire les propriétés suivantes de l'addition ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) monotonie stricte à droite, i.e $\beta<\beta^{'}\Rightarrow\alpha+\beta<\alpha+\beta^{'}$;
   (d) régularité à gauche, i.e $\alpha+\beta=\alpha+\beta^{'}\Rightarrow\beta=\beta^{'}$;
   (e) non monotonie stricte à gauche et non régularité à droite ;
   (f) $\alpha\leq\alpha^{'}\Rightarrow\alpha+\beta\leq\alpha^{'}+\beta$.

Exercice 2. Multiplication ordinale Rappelons la définition par récurrence transfinie du produit de deux ordinaux α et β :

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}0 & \text{si } \beta=0\\ (\alpha\cdot\gamma)+\alpha & \text{si } \beta=\gamma+1\\ \sup\left(\{\alpha\cdot\xi\colon \xi<\beta\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite}\end{cases}$$

Soient deux ordinaux α et β, nous allons définir un bon ordre sur l'ensemble $\alpha\times\beta$ qui sera isomorphe à l'ordinal $\alpha\cdot\beta$:

1. On munit $\alpha\times\beta$ de l'ordre (anti-)lexicographique suivant
$$(\gamma_1,\delta_1)<(\gamma_2,\delta_2) \text{ ssi } \delta_1<\delta_2 \text{ ou } (\delta_1=\delta_2 \;\&\; \gamma_1<\gamma_2).$$
   Montrer que cela définit un bon ordre sur $\alpha\times\beta$.
2. Montrer que ce bon ordre est isomorphe à l'ordinal $\alpha\cdot\beta$.
3. En déduire les propriétés suivantes de la multiplication ordinale :
   (a) associativité ;
   (b) non commutativité ;
   (c) si $\alpha>0$ et $\beta<\gamma$ alors $\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$;

(d) si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;

(e) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

Exercice 3. Soustraction et division euclidienne sur les ordinaux

1. Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
   - $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$;
   - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

   Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2. Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
   (Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 4. Puissance ordinale Rappelons la définition par récurrence transfinie de $\alpha > 0$ à la puissance β :

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\left(\left\{\alpha^\xi : \xi < \beta\right\}\right) & \text{si } \beta \text{ est limite} \end{cases}$$

1. Vérifiez les propriétés suivantes pour $\alpha > 0$, β et γ trois ordinaux :
   - si $\alpha > 1$ et $\beta > \gamma$ alors $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$;
   - $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;
   - $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.
2. Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^β est aussi dénombrable [1].
3. Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^\xi$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^\omega$?

Exercice 5. Développement de Cantor Le développement de Cantor d'un ordinal est son développement en base ω. Il s'agit ici de vérifier qu'un tel développement existe, c'est-à-dire de montrer que tout ordinal α non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m,$$

où $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m$ sont des ordinaux et $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers non nuls.

1. Montrer que $\omega^\alpha \geq \alpha$ pour tout α.
2. Montrer que pour tout α il existe un unique couple (α_1, n_1) tel que
   $$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1).$$
3. En déduire qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \beta_1$.
4. En itérant le procédé (ou de manière équivalente par induction), montrer l'existence du développement de Cantor.
5. Vérifier l'unicité.
6. Donner un critère de comparaison de deux ordinaux α et β connaissant leurs développements de Cantor.
7. Montrer que les ordinaux de la forme ω^α sont les ordinaux β tels que $\gamma + \beta = \beta$ pour tout $\gamma < \beta$.
8. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant les développements de Cantor de α et β. (On donnera des exemples).
9. En utilisant les développements de Cantor, définir une nouvelle fonction somme, notée $\oplus$, sur les ordinaux qui soit commutative, associative et simplifiable (ou régulière, i.e. si $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$ alors $\beta = \gamma$).

1. en particulier, α^β ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est le produit de *cardinaux*.