Université Claude Bernard Lyon 1 — 2nd semestre 2012/2013
Master 1 — Introduction à la Logique

Théorie des ensembles
Feuille 4.

Exercice 1. Montrer que tous les ordinaux finis sont des cardinaux. Montrer que l'ordinal ω est un cardinal.

Exercice 2 (Cardinaux de Hartogs)**.** Soit X un ensemble.

1. Montrer qu'il existe un ordinal qui n'est équipotent à aucune partie de X.
2. Soit α le plus petit ordinal non équipotent à une partie de X. Montrer que α est un cardinal. On l'appelle le *cardinal de Hartogs* de X.
3. Montrer que si $X = \kappa$ est un cardinal, alors $\alpha = \kappa^+ = \{\alpha \in ON : |\alpha| \leq \kappa\}$.

Exercice 3. Montrer qu'il existe un ordinal α tel que $\alpha = \aleph_\alpha$.

Exercice 4.
1. Trouver des suites de cardinaux (κ_i) et (λ_i) telles que $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout i mais $\sum \kappa_i = \sum \lambda_i$.
2. Trouver une suite de cardinaux non nuls (κ_i) (avec I infini) telle que $\sum \kappa_i = \prod \kappa_i$.
3. Calculer $\prod_{n<\omega} n$ (comme produit de *cardinaux*).

Exercice 5.
1. Montrer que si X_0 est équipotent à X_1 et Y_0 est équipotent à Y_1, alors $X_0^{Y_0}$ est équipotent à $X_1^{Y_1}$.
2. Montrer que pour trois cardinaux κ, λ et μ on a $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$ et $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
3. Montrer que pour tout $0 < n < \omega$ et κ infini on a $\kappa^n = \kappa$.
4. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
5. Montrer que $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.
6. Montrer que

$$|\coprod_{i\leq\alpha} X_i| = |(\coprod_{i<\alpha} X_i) \amalg X_\alpha| \quad \text{et} \quad |\prod_{i\leq\alpha} X_i| = |(\prod_{i<\alpha} X_i) \times X_\alpha|.$$

Exercice 6. A l'aide de l'axiome du choix, vérifier que si $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ et $(Y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sont tels que $|X_\alpha| = |Y_\alpha|$ pour tout $\alpha < \lambda$, alors on a

$$|\coprod_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = |\coprod_{\alpha<\lambda} Y_\alpha| \quad \text{et} \quad |\prod_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = |\prod_{\alpha<\lambda} Y_\alpha|.$$

Exercice 7.
1. Montrer que si α et β sont des ordinaux dénombrables, alors $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ et α^β sont dénombrables. Montrer que $\omega^{\omega_1} = \omega_1$, et qu'il existe pour tout ordinal dénombrable α un ordinal *dénombrable* $\beta \geq \alpha$ tel que $\omega^\beta = \beta$.
2. Montrer que $\mathbb{Q} = \aleph_0$, puis montrer que $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$.

Exercice 8. 1. Montrer que $\mathrm{cf}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe une fonction $f : \gamma \to \alpha$ dont l'image ne soit pas strictement majorée.

2. Montrer que, pour tout ordinal α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal.
3. Montrer que $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ pour tout ordinal α. En déduire que $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal régulier.

Exercice 9. 1. Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ d'ensembles avec $|X_\alpha| < \kappa$ pour tout $\alpha < \lambda$, on a $|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| < \kappa$.

2. Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cf}(\kappa)$ est le plus petit cardinal μ tel que κ soit la réunion de μ ensembles de cardinal strictement inférieur à κ.
3. Soit κ un cardinal ; montrer que $\mathrm{cf}(\kappa)$ est le plus petit ordinal γ tel qu'il existe $\lambda_i < \kappa$ pour $i < \gamma$ avec $\kappa = \sum_{i<\gamma} \lambda_i$.
4. On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10.

1. Soit κ un cardinal infini et $\lambda < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer que toute fonction croissante $f : \kappa \to \lambda$ est constante sur un segment final de κ.
2. Soit κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul. Montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+.\kappa^\lambda$
3. Soit n un entier et λ un cardinal non nul. Montrer que $\aleph_n^\lambda = \aleph_n.2^\lambda$.