Introduction à la Logique Mathématique

Seconde partie : Théorie des modèles

Thomas Blossier, Julien Melleray, Frank Wagner

Table des matières

Chapitre 6

Structures et théories

Les théoriciens des modèles s'intéressent aux structures et à leurs ensembles définissables. Ils étudient plus précisément des classes de structures suivant des propriétés partagées par celles-ci, qui peuvent être par exemple combinatoires ou géométriques. Dans ce chapitre on présente des notions de base de la théorie des modèles. Les aspects syntaxiques des langages considérés sont introduits sans être complètement détaillés, l'essentiel pour les théoriciens des modèles étant le point de vue sémantique.

6.1 Structures et sous-structures

Les structures, structures de groupes, de corps ..., sont des objets usuels pour les mathématiciens contemporains. Dans la première partie du cours, la structure sous-jacente était réduite à un univers muni d'une unique relation binaire, $\in$ (et de l'égalité $=$). Pour ce cours, nous définissons la notion de structures de la façon suivante :

Définition 6.1.

1. Une *structure* $\mathfrak{M}$ est la donnée d'un *ensemble de base* ou *univers* M non vide muni :
   - d'une famille $(c_i^{\mathfrak{M}})_{i\in I}$ de constantes, où $c_i^{\mathfrak{M}} \in M$,
   - d'une famille $(f_j^{\mathfrak{M}})_{j\in J}$ de fonctions, où pour tout $j \in J$, $f_j^{\mathfrak{M}}$ est une fonction totale de M^{n_j} dans M pour un entier $n_j > 0$,
   - d'une famille $(R_k^{\mathfrak{M}})_{k\in K}$ de relations, où pour tout $k \in K$, $R_k^{\mathfrak{M}}$ est un sous-ensemble de M^{m_k} pour un entier $m_k > 0$.

   On supposera de plus qu'une structure est toujours munie de l'égalité, c'est-à-dire que la diagonale de $\mathfrak{M}^2$ est l'une des relations $R_k^{\mathfrak{M}}$. L'ensemble de base M sera appelé *domaine* de $\mathfrak{M}$ et sera souvent noté de la même façon que $\mathfrak{M}$.

2. Le *langage* $\mathcal{L}$ associé à une structure $\mathfrak{M}$ consiste en :
   - un symbole de constante c_i pour chaque constante $c_i^{\mathfrak{M}}$,
   - un symbole de fonction f_j *d'arité* n_j pour chaque fonction $f_j^{\mathfrak{M}}$,
   - un symbole de relation R_k *d'arité* n_k pour chaque relation $R_k^{\mathfrak{M}}$.

3. Une $\mathcal{L}$-*structure* est une structure $\mathfrak{M}$ dont le langage associé est $\mathcal{L}$.

Notation. Un langage arbitraire sera noté

$$\mathcal{L} = \{(c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\}.$$

Une $\mathcal{L}$-structure sera notée

$$\mathfrak{M} = \langle M, (c_i^{\mathfrak{M}})_{i\in I}, (f_j^{\mathfrak{M}})_{j\in J}, (R_k^{\mathfrak{M}})_{k\in K}\rangle$$

ou plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguité

$$\mathfrak{M} = \langle M, (c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\rangle.$$

Dans ces notations, l'égalité sera le plus souvent omise.

Exemple 6.2.

1. $\langle \mathbb{N}, 0, +\rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, 0, +\rangle$ sont des structures ayant le même langage associé $\mathcal{L} = \{0, +\}$ qui est constitué d'un symbole de constante 0, d'un symbole $+$ de fonction binaire et d'un symbole de relation $=$ pour l'égalité.
2. Le langage des ordres $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ ne contient que deux relations binaires $=$ et $<$. Les structures $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ sont des $\mathcal{L}_{ord}$-structures.
3. Le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ contient une constante 1, une fonction binaire $\cdot$, une fonction unaire $^{-1}$ et l'égalité.
4. Le langage des anneaux $\mathcal{L}_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ contient deux constantes 0 et 1, trois fonctions binaires $+$, $-$, $\cdot$, et l'égalité.
5. Le langage de la théorie des ensembles $\in$.

Remarque. Toute ensemble avec une relation binaire peut être vue comme une $\mathcal{L}_{ord}$-structure, même si cette relation n'est pas une relation d'ordre. On pourrait par exemple considérer la structure $\mathfrak{M} = \langle M, <\rangle$ avec $M = \mathbb{C}$ et $<^{\mathfrak{M}} = \{(x, y) \in M^2 : y^2 = x^3\}$. Autrement dit la donnée d'un langage $\mathcal{L}$ ne fixe pas les propriétés des constantes, fonctions ou relations d'une $\mathcal{L}$-structure (à l'exception des arités). Nous utiliserons des formules construites à partir de $\mathcal{L}$ pour exprimer certaines propriétés.

Nous fixons pour toute la suite un langage $\mathcal{L} = \{(c_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (R_k)_{k\in K}\}$.

Définition 6.3. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Alors $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure* de $\mathfrak{N}$ (on notera $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$) si $M \subseteq N$ et si cette inclusion préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire est telle que :
– pour toute constante $c \in \mathcal{L}$, $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}$,
– pour toute fonction n-aire $f \in \mathcal{L}$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $f^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{N}}(\bar{a})$,
– pour toute relation n-aire $R \in \mathcal{L}$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\bar{a} \in R^{\mathfrak{M}}$ ssi $\bar{a} \in R^{\mathfrak{N}}$.

Remarque 6.4.

1. Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure. On dira aussi qu'une partie M de N est une *sous-structure* de $\mathfrak{N}$ si M contient toutes les constantes et est close par toutes les fonctions. Dans ce cas, on vérifie (exercice) que la structure «induite sur M»

$$\mathfrak{M} := \langle M, (c_i^{\mathfrak{N}}), (f_j^{\mathfrak{N}}{}_{|M^{n_j}}), (R_k \cap M^{n_k})\rangle$$

est une sous-structure, au sens précédent, de $\mathfrak{N}$.
2. Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure et A une partie de N. Il existe une plus petite sous-structure de $\mathfrak{N}$ contenant A, la sous-structure engendrée par A, qui est la clôture de A et de l'ensemble des constantes de $\mathcal{L}$ par les fonctions de $\mathcal{L}$.
3. La notion de sous-structure dépend du langage choisi. Par exemple, $\mathbb{N}$ est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ et de $\langle \mathbb{Z}, 0, +\rangle$ mais pas de $\langle \mathbb{Z}, 0, +, -\rangle$.

Exercice 6.5. Soit un corps K.

1. Remarquer que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot\rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f\rangle$ soit un corps.

Exercice 6.6. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{L}$-structures, c'est-à-dire $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ pour tout $i < j$. Alors la réunion $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, est munie canoniquement d'une $\mathcal{L}$-structure, notée $\mathfrak{M} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{M}_i$, qui satisfait $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ pour tout $i \in I$.

Définition 6.7. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures.

1. Un *morphisme* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est une application σ de M dans N qui préserve les constantes, les fonctions et les relations de la façon suivante :
   - pour toute constante $c \in \mathcal{L}$, $\sigma(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$,
   - pour toute fonction n-aire $f \in \mathcal{L}$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{a})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$,
   - pour toute relation n-aire $R \in \mathcal{L}$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, si $\bar{a} \in R^{\mathfrak{M}}$ alors $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathfrak{N}}$.
2. Un *plongement* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un morphisme σ de M dans N qui de plus vérifie pour toute relation n-aire $R \in \mathcal{L}$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$,

$$\bar{a} \in R^{\mathfrak{M}} \text{ si et seulement si } \sigma(\bar{a}) \in R^{\mathfrak{N}}.$$

   Remarquons qu'un plongement est nécessairement injectif (car l'égalité est l'une des relations du langage). Notons également que l'image d'un plongement est une sous-structure et que réciproquement $M \subseteq N$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ ssi l'identité de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un plongement.
3. Un *isomorphisme* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un plongement surjectif. Un *automorphisme* de $\mathfrak{M}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur lui-même. On dénote $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ pour $\mathfrak{M}$ isomorphe à $\mathfrak{N}$.

Nous allons introduire maintenant la notion de *va-et-vient*, notion qui sera très utile pour l'étude de structures.

Définition 6.8. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures.

1. Un *isomorphisme partiel* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un isomorphisme d'une sous-structure de $\mathfrak{M}$ sur une sous-structure de $\mathfrak{N}$. (Remarque : tout plongement est un isomorphisme partiel.)
2. Une famille non vide $\mathcal{F}$ d'isomorphismes partiels de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est une *famille Karpienne* entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ si pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$,
   – pour tout $m \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $m \in \mathrm{Dom}(\tau)$ (*VA*),
   – pour tout $n \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $n \in \mathrm{Im}(\tau)$ (*VIENT*).
   On appelera aussi une famille Karpienne un *va-et-vient*.
3. Deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont ∞-*équivalentes* s'il existe un va-et-vient entre elles.

Exemple 6.9. Deux ordres totaux denses sans extrémité sont ∞-équivalents.
Soient $\langle X, <\rangle$ et$\langle Y, <\rangle$ deux ordres totaux denses sans extrémité. Soit $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes entre des parties finies de X et Y. Cette famille est évidemment non vide : pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, l'application qui à x associe y est un isomorphisme de $\{x\}$ sur $\{y\}$. Soit σ un isomorphisme de $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq X$ sur $B = \{b_1, ..., b_n\} \subseteq Y$. On peut supposer que pour tout i, $\sigma(a_i) = b_i$ et que $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Dans ce cas on a aussi $b_1 < b_2 < ... < b_n$. Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $x \in X \setminus A$. Alors ou bien $x < a_1$ et dans ce cas on prolonge σ en envoyant x sur un $y < b_1$, ou bien $a_i < x < a_{i+1}$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y \in Y$ tel que $b_i < y < b_{i+1}$, ou bien $a_n < x$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y > b_n$.

Exemple 6.10. Deux corps algébriquement clos K_1 et K_2 de même caractéristique et de degré de transcendance infini sont ∞-équivalents.
Soit $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes entre des sous-corps finiment engendrés respectivement de K_1 et K_2. Comme K_1 et K_2 ont même caractéristique, $\mathcal{F}$ est non vide car leurs corps premiers sont isomorphes.
Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ un isomorphisme de k_1 sur k_2. Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $a \in K_1$.
Ou bien a est algébrique sur k_1. Soit $P \in k_1[X]$ son polynôme minimal. Alors $Q = \sigma(P)$ est un polynôme irréductible de $k_2[X]$. Comme K_2 est algébriquement clos il existe $b \in K_2$ qui a Q pour polynôme minimal sur k_2. On obtient alors un isomorphisme de $k_1(a)$ sur $k_2(b)$ qui prolonge σ en envoyant a sur b.
Ou bien a est transcendant sur k_1. Comme k_2 est finiment engendré et K_2 est de degré de transcendance infini, il existe $b \in K_2$ transcendant sur k_2. Même conclusion que dans le cas précédent.

Exercice 6.11. Soit K un corps. On considère $\mathcal{L}_K = \{0, +, \lambda_k : k \in K\}$ le langage des K-espaces vectoriels, les λ_k étant des fonctions unaires (les fonctions scalaires). Soient E et F deux K-espaces vectoriels vus comme $\mathcal{L}_K$-structures. Montrer que si E et F sont de dimension infinie alors ils sont ∞-équivalents.

Exercice 6.12. Donner un exemple de deux ordres totaux discrets infinis qui ne sont pas ∞-équivalents.

Exercice 6.13. Montrer que la relation d'∞-équivalence est bien une relation d'équivalence.

Remarque 6.14. Si deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes alors il existe un va-et-vient entre ces deux structures. En effet la famille réduite à un isomorphisme entre les deux structures est une famille Karpienne.

Réciproquement :

Proposition 6.15. *Deux structures dénombrables ∞-équivalentes sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille Karpienne d'isomorphismes partiels définissant un va-et-vient entre deux structures dénombrables $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. On choisit une énumération $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de M et une énumération $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de N.
On définit alors par récurrence une suite croissante $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ d'isomorphismes partiels dans $\mathcal{F}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $j < i$,

$$m_j \in \mathrm{Dom}(\sigma_i) \quad \text{et} \quad n_j \in \mathrm{Im}(\sigma_i).$$

On choisit pour cela, n'importe quel élément de $\mathcal{F}$ pour σ_0. Supposons que $\sigma_i \in \mathcal{F}$ est choisi. Par va-et-vient, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ_i tel que $m_i \in \mathrm{Dom}(\tau)$ et $n_i \in \mathrm{Im}(\tau)$. On prend alors pour σ_{i+1}, l'isomorphisme partiel τ.
Soit $\sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i$. Alors $\mathrm{Dom}(\sigma) = M$ et $\mathrm{Im}(\sigma) = N$. Vérifions que σ est un plongement :
– soit c une constante de $\mathcal{L}$. Alors

$$\sigma(c^{\mathfrak{M}}) = \sigma_0(c^{\mathrm{Dom}(\sigma_0)}) = c^{\mathrm{Im}(\sigma_0)} = c^{\mathfrak{N}}.$$

– soit f une fonction n-aire de $\mathcal{L}$, R une relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $\bar{a} \in M^n$. Alors il existe un entier i tel que $\bar{a} \in (\mathrm{Dom}(\sigma_i))^n$. On a donc

$$\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{a})) = \sigma_i(f^{\mathrm{Dom}(\sigma_i)}(\bar{a})) = f^{\mathrm{Im}(\sigma_i)}(\sigma_i(\bar{a})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$$

et $\bar{a} \in R^{\mathfrak{M}}$ ssi $\bar{a} \in R^{\mathrm{Dom}(\sigma_i)}$ ssi $\sigma_i(\bar{a}) \in R^{\mathrm{Im}(\sigma_i)}$ ssi $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathfrak{N}}$.

□

Exemple 6.16. Deux ordres totaux denses sans extrémité et dénombrables sont isomorphes.

6.2 Langage du 1er ordre et satisfaction

Afin d'étudier les *ensembles définissables* et d'exprimer certaines propriétés d'une structure, on considère des formules obtenues à partir du langage de base. On se restreint de manière arbitraire à un langage finitiste (formules de longueur finie) et du premier ordre (on ne quantifie que sur des éléments de l'univers). Ce choix est fait pour des raisons pratiques car c'est un cadre qui fournit de "bons outils techniques", en particulier le théorème de compacité que nous présenterons dans le chapitre suivant.
Dans ce langage, on pourra alors exprimer les *axiomes* (du premier ordre) satisfaits par une structure et donc parler de *théories*.

Nous avons précédemment fixé un langage $\mathcal{L}$ et nous allons de plus utiliser un ensemble infini dénombrable de variables qui sont généralement notées $x, y, z, t, x_i, \ldots$ pour construire par induction les $\mathcal{L}$-termes et ensuite les $\mathcal{L}$-formules à l'aide de connecteurs :

Définition 6.17.

1. On commence par définir l'ensemble des *termes* du langage $\mathcal{L}$ par l'induction suivante :
   – toutes les constantes de $\mathcal{L}$ et toutes les variables sont des $\mathcal{L}$-termes,
   – si f est une fonction n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.
2. On définit ensuite l'ensemble des *formules* de $\mathcal{L}$ par l'induction suivante :
   – *Les formules atomiques* : si R est une relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule,
   – *Combinaisons booléennes (négation, conjonction, disjonction)* : si ϕ et ψ sont des formules alors $\neg\phi$ (*non* ϕ), $(\phi \wedge \psi)$ (ϕ *et* ψ) et $(\phi \vee \psi)$ (ϕ *ou* ψ) sont des formules,
   – *Quantifications universelle et existentielle* : si ϕ est une formule et x est une variable alors $\forall x\phi$ (*pour tout* x, ϕ) et $\exists x\phi$ (*il existe* x, ϕ) sont des formules.
3. *Variables liées, variables libres* :
   – si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x dans les formules $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$ sont *liées* au quanteur (ou quantificateur) $\forall$ ou $\exists$, exceptées celles qui étaient liées auparavant dans la formule ϕ,
   – si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x qui ne sont liées à aucun quanteur sont dites *libres*. En particulier toutes les occurrences des variables d'une formule sans quanteur sont libres.
4. Un *énoncé* (ou *formule close*) est une formule dont toutes les (occurrences de) variables sont liées.

Remarque. Une formule est un mot fini constitué de symboles de constantes, fonctions et relations de $\mathcal{L}$, de symboles de variables, de connecteurs et de séparateurs (les paranthèses et la virgule).

Exemple 6.18. Les termes de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les variables ; les formules atomiques de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les égalités et les inégalités. Les formules suivantes sont des énoncés de $\mathcal{L}_{ord}$ qui décriront, une fois interprétés, les ordres totaux stricts :

1. $\forall x \neg\, x < x$,
2. $\forall x \forall y((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
3. $\forall x \forall y \forall z\, \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$.

Nous allons très rapidement passer au sens «naturel»que l'on donne à ces formules dans une structure. Pour être tout à fait rigoureux dans nos futures définitions et démonstrations par induction sur la construction des formules, il est nécessaire de vérifier que la lecture des formules est unique. Nous laissons la vérification de ce résultat syntaxique au lecteur :

Fait 6.1 (Lecture unique)**.**

1. *Chaque terme est, soit une variable, soit une constante, soit de la forme $f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes. Cette écriture est* **uniquement déterminée**.
2. *Chaque formule est :*
   - *soit atomique et de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est une relation d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes,*
   - *soit de la forme $\neg\phi$ où ϕ est une formule,*
   - *soit de la forme $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ou de la forme $(\phi_1 \vee \phi_2)$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux formules,*
   - *soit de la forme $\exists x\phi$ ou de la forme $\forall x\phi$ où ϕ est une formule et x est une variable.*

   Cette écriture est **uniquement déterminée**.

Pour définir l'interprétation des termes et la satisfaction des formules dans une structure, on considérera toujours un terme t avec un choix de variables $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $\bar{x}$ contienne au moins toutes les variables ayant une occurrence dans t et de même on considérera une formule ϕ avec un uple $\bar{x}$ de variables tel que toute variable ayant une occurrence libre dans ϕ se trouve dans l'uple $\bar{x}$. On utilisera alors les notations $t(\bar{x})$ et $\phi(\bar{x})$.

Exemple 6.19. Dans le langage $\mathcal{L} = \{\in\}$ on pourra par exemple noter $\phi(x, y)$ la formule

$$(x \in y \;\wedge\; \forall z(\neg\, x \in z \;\vee\; (y = z \;\vee\; y \in z))).$$

Cette formule exprimera le fait que y est le successeur de x.

Dans le langage $\mathcal{L} = \{f\}$ réduit à une fonction unaire, on pourra noter $\psi(x, y)$ la formule

$$(f(x) = y \;\wedge\; \forall y(y = x \;\vee f(y) \neq f(x))).$$

Cette formule exprimera le fait que x est l'unique antécédent de y par f. Notons que la variable y de $\psi(x,y)$ correspond à l'unique occurrence libre de y dans la formule (la première occurence), les occurences suivantes sont liées au quanteur $\forall$. On peut évidemment renommer la variable liée et on obtient par exemple la formule

$$(f(x) = y \ \wedge \ \forall z(z = x \ \vee f(z) \neq f(x)))$$

qui aura exactement la même interprétation que la précédente. (Pour abréger on a utilisé ici le symbole $\neq$ pour la négation de l'égalité.)

Notation. Pour toute la suite du cours les notations $\bar{x}$, $\bar{y}$,... désigneront des uples finis de variables et les notations $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{m}$ ... désigneront des uples finis d'éléments.

Définition 6.20. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure.

1. Soit $t(\bar{x})$ un terme et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ un uple d'éléments de M de même longueur que $\bar{x}$. On obtient un terme $t(\bar{m})$, à *paramètres* $\bar{m}$, en substituant m_i à toute occurrence de x_i dans t. On définit alors l'*interprétation* $t^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) \in M$ du terme $t(\bar{m})$ par l'induction suivante :
   – l'interprétation d'une constante c est $c^{\mathfrak{M}}$,
   – l'interprétation d'un paramètre m est m,
   – l'interprétation de $f(t_1, \ldots, t_n)(\bar{m})$ où f est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes est $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m}))$.
2. De même pour une formule $\phi(\bar{x})$, on obtient une formule $\phi(\bar{m})$, à paramètres $\bar{m}$, en substituant m_i à toute occurrence libre de x_i dans ϕ. On définit alors la *satisfaction* $\mathfrak{M}$, que l'on dénote $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$, par l'induction suivante :
   – $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)(\bar{m})$ ssi $(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) \in R^{\mathfrak{M}}$,
   – $\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \not\models \phi(\bar{m})$,
   – $\mathfrak{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \models \phi_1(\bar{m})$ et $\mathfrak{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
   – $\mathfrak{M} \models (\phi_1 \vee \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{M} \models \phi_1(\bar{m})$ ou $\mathfrak{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
   – $\mathfrak{M} \models \forall x\phi\ (x, \bar{m})$ ssi pour tout $a \in M$, $\mathfrak{M} \models \phi(a, \bar{m})$,
   – $\mathfrak{M} \models \exists x\phi\ (x, \bar{m})$ ssi il existe $a \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi(a, \bar{m})$.
3. Si $\phi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$), on dit également que $\phi(\bar{m})$ est *vraie* dans $\mathfrak{M}$, que $\mathfrak{M}$ *satisfait* $\phi(\bar{m})$ ou que $\bar{m}$ *satisfait* $\phi(\bar{x})$ dans $\mathfrak{M}$.
4. Soient $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux formules. On dit que $\phi(\bar{x})$ *implique* $\psi(\bar{x})$ si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$.
   Les formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont *équivalentes* si $\phi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ implique $\phi(\bar{x})$.

Exercice 6.21. Toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen $\vee$, ni le quanteur $\forall$.

On vérifie facilement que dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs formules, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente. On supprimera donc en général les parenthèses superflues.
Par la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes :

– $\phi \rightarrow \psi$ pour $\neg\phi \vee \psi$,
– $\phi \leftrightarrow \psi$ pour $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.

Exercice 6.22. Deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute $\mathcal{L}$-structure satisfait $\forall\bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 6.23. Toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\phi$ où les Q_i sont des quanteurs et ϕ est une formule sans quanteur.

6.3 Équivalence élémenaire, extension élémentaire

Maintenant que nous avons défini les formules, nous pouvons parler des structures vérifiant les mêmes énoncés, c'est-à-dire ayant même *théorie* (cf plus loin).

Définition 6.24. Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *élémentairement équivalentes* (noté $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$) si elles satisfont les mêmes énoncés.

Exemple 6.25.

1. $\langle\mathbb{Z}, +\rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, +\rangle$ car ces deux structures sont isomorphes (voir Cor 6.28).
2. $\langle\mathbb{Q}, +\rangle \equiv \langle\mathbb{R}, +\rangle$. (Cf plus loin, théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion).
3. $\langle\mathbb{Z}, +\rangle \not\equiv \langle\mathbb{Q}, +\rangle$ car $\forall x\exists y\ x = y + y$ est satisfaite dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6.26. Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure finie et $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ alors $|\mathfrak{N}| = |\mathfrak{M}|$.

La proposition suivante montre en particulier que deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

Proposition 6.27. *Soit $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures.*

1. *Si σ est un morphisme de $\mathfrak{M}$ vers $\mathfrak{N}$ alors pour toute formule atomique $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$, si $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*
2. *Si σ est un plongement de $\mathfrak{M}$ vers $\mathfrak{N}$ alors pour toute formule sans quanteurs $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$, $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*
3. *Si σ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ alors pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$, $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m}))$.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur les termes puis les formules. Elle est laissée au lecteur qui pourra s'inspirer de la preuve de la proposition suivante. $\square$

Corollaire 6.28. Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

La méthode de va-et-vient sera souvent utilisée pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes :

Proposition 6.29. *Si $\mathcal{F}$ est une famille Karpienne entre deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, alors pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$, tout $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$ (ici n peut-être nul) et toute formule $\phi(\bar{x})$,*

$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

En particulier, $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques. Soit σ un isomorphisme partiel de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$. Montrons par induction, que pour tout terme $t(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$, $t^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ et $\sigma(t^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = t^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$. Pour les constantes et les variables, c'est évident car $\mathrm{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$ et σ est un isomorphisme de $\mathrm{Dom}(\sigma)$ sur la sous-structure $\mathrm{Im}(\sigma)$ de $\mathfrak{N}$. Si $t(x)$ est le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction n-aire et $t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x})$ sont des termes pour lesquels le résultat est vrai. Alors $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ car $\mathrm{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$. De plus

$$\sigma(t^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = \sigma(f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m}))) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m})), \ldots, \sigma(t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})))$$

car σ est un isomorphisme partiel. Par hypothèse d'induction, on obtient

$$\sigma(t^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = f^{\mathfrak{N}}(t_1^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m})), \ldots, t_n^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))) = t^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m})).$$

On en déduit qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques et, par combinaisons booléennes, toutes les formules sans quanteur.

Nous montrons maintenant le résultat par induction sur la construction des formules pour tous les éléments de $\mathcal{F}$. Si le résultat est vrai pour deux formules, il est évidemment vrai pour toute combinaison booléenne de ces formules. Il suffit donc de vérifier que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x \phi(x, \bar{y})$. Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ et $\bar{m} \in (\mathrm{Dom}(\sigma))^n$. Si $\mathfrak{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $a \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi(a, \bar{m})$. Par VA, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $a \in \mathrm{Dom}(\tau)$. Par hypothèse d'induction, $\mathfrak{N} \models \phi(\tau(a), \tau(\bar{m}))$ donc $\mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$. Si $\mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$, on fait de même avec le VIENT. □

Proposition 6.30. *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Supposons que $\mathfrak{M}$ est finie. Alors $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ ssi $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.*

Démonstration. Soit n le cardinal de $\mathfrak{M}$ et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une énumération de M. Soit $\phi(\bar{x})$une formule sans paramètres satisfaite par $\bar{a}$, et avec le moindre de réalisations dans M^n. Alors $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$, donc $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Notons que si $\psi(\bar{x})$ est une autre formule sans paramètres satisfaite par $\bar{a}$, alors $\phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})$ est aussi satisfaite par $\bar{a}$ et a moins de réalisations que ϕ ; par minimalité $\mathfrak{M} \models \forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. Puisque $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, on a aussi $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$.
Comme $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Soit donc $\bar{b} \in N^n$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(\bar{b})$. Alors $\bar{b}$ satisfait également toute formule ψ satisfaite par $\bar{a}$. Notons σ l'application de M dans N qui à a_k associe b_k. Nous allons vérifier que σ est un isomorphisme.

Notons d'abord que la formule $\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j$ est satisfaite par $\bar{a}$, donc aussi par $\bar{b}$; ainsi σ est injective. De plus, la formule $\forall y \bigvee_i y = x_i$ est satisfaite par $\bar{a}$ et par $\bar{b}$; on en déduit que σ est surjective et $N = \{b_1, \ldots, b_k\}$.
Vérifions que σ est un plongement :

1. Soit c une constante de $\mathcal{L}$. Alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $c^{\mathfrak{M}} = a_k$. Alors $\bar{a}$ satisfait la formule $c = x_k$, et $\bar{b}$ la satisfait aussi ; on a $c^{\mathfrak{N}} = b_k = \sigma(a_k) = \sigma(c^{\mathfrak{M}})$.
2. Soit f une fonction r-aire et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in M^r$. Soit $m_0 := f^{\mathfrak{M}}(\bar{m})$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. Alors $\bar{a}$ satisfait $f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}) = x_{k_0}$, et $\bar{b}$ aussi. Ainsi $f^N(\sigma(\bar{m})) = \sigma(f^M(\bar{m}))$.
3. Soient R une relation r-aire et $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in M^r$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. Si $\bar{m} \in R^{\mathfrak{M}}$, alors $\bar{a}$ satisfait $R(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r})$, et $\bar{b}$ aussi. Ainsi $\sigma(\bar{m}) \in R^N$. Si $\bar{m} \notin R^{\mathfrak{M}}$, alors $\bar{a}$ satisfait $\neg R(x_{k_1}, \ldots, x_{k_r})$, et $\bar{b}$ aussi. Ainsi $\sigma(\bar{m}) \notin R^N$. On en déduit que $\mathfrak{M} \models R^{\mathfrak{M}}(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models R^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$.

$\square$

Exercice 6.31. Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Exercice 6.32. Donner un exemple de structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ mais n'est pas élémentairement équivalente à $\mathfrak{N}$.

Définition 6.33.

1. Un plongement σ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est *élémentaire* si pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,
$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$
2. $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure élémentaire de* $\mathfrak{N}$ (notée $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$) si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ telle que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,
$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \phi(\bar{m}).$$
3. Un isomorphisme partiel σ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est *élémentaire* si pour toute formule $\phi(x_1, ..., x_n)$ et tout $\bar{m} \in \mathrm{dom}(\sigma)^n$,
$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

Remarque 6.34.
- Un isomorphisme est élémentaire (Rem 6.14 et prop 6.29).
- Si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$ alors $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. (De même, si $\mathfrak{M}$ se plonge élémentairement dans $\mathfrak{N}$, alors $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.)
- La réciproque est fausse : une sous-structure élémentairement équivalente n'est pas nécessairement élémentaire. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ mais $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle \not\preccurlyeq \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Exercice 6.35. Soient $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_3$.

– Si $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ alors $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$.
– Si $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ et $\mathfrak{M}_2 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ alors $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$.
– Trouver un exemple tel que $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_3$ mais $\mathfrak{M}_2 \not\preccurlyeq \mathfrak{M}_3$. (Cette question est difficile à traiter en utilisant uniquement les notions vu précédemment. Elle pourra être regardée ensuite.)

Exercice 6.36. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne élémentaire de $\mathcal{L}$-structures ($\mathfrak{M}_i \preccurlyeq \mathfrak{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors pour tout $i \in I$, $\mathfrak{M}_i \preccurlyeq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{M}_i$.

Voici un critère utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire. Ce critère n'utilise que la satisfaction dans la grande structure :

Proposition 6.37 (Test de Tarski)**.** *Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Alors $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$. Alors $\mathfrak{M} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$. Donc il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Alors $\mathfrak{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.
Réciproquement si $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ satisfont le critère de Tarski. On montre par induction sur les formules que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$ ssi $\mathfrak{N} \models \phi(\bar{m})$. Le résultat est évidemment vérifié pour les formules atomiques car $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Si le résultat est vrai pour ϕ_1 et ϕ_2, il est facile de voir qu'il est encore vrai pour les combinaisons booléennes de ϕ_1 et ϕ_2. Il suffit donc de montrer que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x\phi(x, \bar{y})$. Soit $\bar{m} \in M^n$. Si $\mathfrak{M} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, alors $\mathfrak{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$. Si $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$. Alors par le critère de Tarski, il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathfrak{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathfrak{M} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$. □

Corollaire 6.38 (Théorème de Löwenheim-Skolem Descendant)**.** Soient $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie, A un ensemble de paramètres dans N, et κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathfrak{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ contenant A et de cardinal κ.

Démonstration. On peut supposer que $|A| = \kappa$. On construit par récurrence une chaîne $(\mathfrak{M}_i)_{i\in\omega}$ de sous-structures de $\mathfrak{N}$ telle que $\mathfrak{M}_0$ contient A, telle que pour tout $i \in \omega$, $|\mathfrak{M}_i| = \kappa$ et telle que pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{m}_i \in M_i^n$, si $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m}_i)$ alors il existe $m_{i+1} \in M_{i+1}$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(m_{i+1}, \bar{m}_i)$.
Soit $\mathfrak{M}_0$ la sous-structure de $\mathfrak{N}$ engendrée par A. Cette sous-structure est de cardinal κ car $|L| \leq \kappa = |A|$. Si $\mathfrak{M}_i$ est construit, alors pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ (il y en a $\max(|L|, \aleph_0)$) et tout paramètre $\bar{m} \in M_i^n$ tel que $\mathfrak{N} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$ (il y en a au plus κ), on choisit $n_{\phi,\bar{m}} \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(n_{\phi,\bar{m}}, \bar{m})$. On définit alors $\mathfrak{M}_{i+1}$ comme la sous-structure engendrée par M_i et les $n_{\phi,\bar{m}}$. Cette sous-structure est évidemment de cardinal κ et vérifie l'hypothèse de récurrence.
Soit $\mathfrak{M} := \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{M}_i$. Alors $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ de cardinal κ qui de plus vérifie le test de Tarski. C'est donc une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$. □

6.4 Théories, modèles et ensembles définissables

Définition 6.39. Soit Σ un ensemble d'énoncés.

1. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est un *modèle* de Σ (noté $\mathfrak{M} \models \Sigma$) si tout énoncé de Σ est satisfait par $\mathfrak{M}$.
2. On dit que Σ est *consistant* si Σ a un modèle.
3. Un énoncé ϕ est une *conséquence* de Σ (noté $\Sigma \vdash \phi$) si tout modèle de Σ satisfait ϕ.
4. Une *théorie* T est un ensemble consistant d'énoncés contenant toutes ses conséquences. Si T correspond à l'ensemble des conséquences de Σ, on dit que Σ est un *ensemble d'axiomes* pour T ou une *axiomatisation* de T.
5. Une théorie T est *complète* si elle est maximale pour l'inclusion, ce qui signifie que pour toute formule ϕ, $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$.
6. En général si une théorie T est axiomatisée par Σ, on confond T et Σ. En particulier on dira que Σ est complet si pour tout énoncé ϕ, $\Sigma \vdash \phi$ ou $\Sigma \vdash \neg\phi$.
7. Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on note $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ la théorie constituée de l'ensemble des énoncés vrais dans $\mathfrak{M}$. Cette théorie est évidemment complète.

Remarque 6.40.

1. Deux théories complètes qui ont un modèle commun sont égales.
2. Deux modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalents ssi $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ ssi $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont modèles d'une même théorie complète.
3. Une théorie est complète si ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

Notation. Pour $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et A un ensemble de paramètres dans M, on peut considérer l'*expansion* $\mathfrak{M}_A$ de $\mathfrak{M}$ par des constantes dans A, c'est-à-dire la $\mathcal{L}_A$-structure $\langle M, \mathcal{L}, a : a \in A\rangle$ où $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{a : a \in A\}$. On note $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ la théorie de $\mathfrak{M}_A$ qui correspond donc à l'ensemble des énoncés à paramètres dans A qui sont vrais dans $\mathfrak{M}$.

Exercice 6.41. Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$,
2. $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, M)$,
3. l'inclusion $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ est un plongement élémentaire.

On appelle $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$ le *diagramme élémentaire* de $\mathfrak{M}$.

Exercice 6.42. Soit T une théorie complète.

1. Si T a un modèle fini $\mathfrak{M}$, alors tous ses modèles sont isomorphes à $\mathfrak{M}$.
2. Si T a un modèle infini, alors tous ses modèles sont infinis. (Nous verrons plus loin que, contrairement au cas fini, une structure infinie ne peut être l'unique modèle de sa théorie.)

Exemple 6.43.

1. Théorie des ensembles infinis dans le langage réduit à l'égalité :
   – $\exists x_1 x_2 ... x_n \ \wedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$, pour tout $n > 0$.
2. Théorie des ordres totaux :
   – $\forall x \neg\, x < x$,
   – $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
   – $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$.
   Cette théorie n'est pas complète. Par exemple $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ sont des modèles de cette théorie qui ne sont pas élémentairement équivalents. Le premier satisfait l'énoncé $\exists x \forall y \neg (y < x)$ alors que le second non.
3. Théorie des ordres totaux denses sans extrémité :
   – théorie des ordres totaux,
   – $\forall x \forall y\ (x < y) \rightarrow (\exists z (x < z < y))$,
   – $\forall x \exists y \exists z\ (y < x < z)$.
   Cette théorie est complète. (Voir exo 6.31.)
4. La théorie des corps commutatifs n'est pas complète, elle a des modèles finis et infinis. La théorie des corps commutatifs de caractéristique 0 n'est pas non plus complète. La formule $\exists x (x^2 = -1)$ est vraie dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
5. Théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé :
   – théorie des corps commutatifs,
   – $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ si $p > 0$; $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0$, pour tout $n > 0$, si $p = 0$.
   – $\forall y_0 \ldots \forall y_n (y_n \neq \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^{n} y_n x^i = 0)$, pour tout $n > 0$.
   Cette théorie est complète. (Voir exemple 7.17.)
6. Théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux dans $\mathcal{L} = \{0, +, -\}$:
   – théorie des groupes abéliens,
   – $\exists x \neq 0$,
   – $\forall x \exists y\ ny = x$, pour tout $n > 0$,
   – $\forall x (x = 0 \vee nx \neq 0)$, pour tout $n > 0$.
   Cette théorie est complète. (Voir exemple 7.17)

Exercice 6.44. Soit $\mathcal{L}$ le langage réduit à une relation binaire E (et l'égalité).

1. Donner une axiomatisation (dans ce langage) de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.
3. Montrer que ces deux théories sont complètes.

Nous pouvons maintenant étudier les parties définies par des formules dans une structure :

Définition 6.45. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une partie D de M^n est un *ensemble définissable* dans $\mathfrak{M}$ s'il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et des paramètres $\bar{b}$ dans M tels que

$$D = \{\bar{a} \in M^n : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

On dit alors que D est définissable avec des paramètres dans B ou est défini par une formule à paramètres dans B si $\bar{b} \subseteq B$. Si de plus D est défini par une formule atomique, on dit que D est un *ensemble définissable atomique.*
On note $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ la famille des ensembles définissables de $\mathfrak{M}$.

Définition 6.46. Si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$ et $D \subseteq M^n$ est un ensemble définissable dans $\mathfrak{M}$, alors D a une extension canonique en un ensemble $D' \subseteq N^n$ définissable dans $\mathfrak{N}$, tel que $D' \cap M^n = D$: si D est défini par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ ($\bar{b} \subseteq M$) alors $D' := \{\bar{a} \in N^n : \mathfrak{N} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. En pratique on confondra D' avec D.

Exercice 6.47. Vérifier que D' ne dépend pas du choix de ϕ pour D.

Exercice 6.48. Soit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Montrer que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute partie non vide définissable $D \subseteq N$ à paramètres dans M on a $D \cap M \neq \emptyset$.

Exemple 6.49. Dans un groupe $\langle G, 1, \cdot, ^{-1}\rangle$, le centre C de G est défini par $\phi(x) := \forall y\ xy = yx$. Soit $\psi(x, y) := (xy = yx)$. Pour tout $a \in G$, le centralisateur de a, $C(a)$, est défini par $\psi(x, a)$.

Exercice 6.50. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot\rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 6.51. Montrer que l'ordre sur $\mathbb{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$.

Exercice 6.52. La famille $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ est close par

1. combinaisons booléennes finies : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$, le complémentaire de A, l'union et l'intersection de A et B sont dans $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$,
2. produits cartésiens : si $A, B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$, $A \times B \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M})$,
3. projections : si A est une partie définissable de M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable,
4. spécialisations : si A est une partie définissable de M^{n+m} et si $\bar{b} \in M^m$ alors
$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M}),$$
5. permutations des coordonnées : si A est une partie définissable de M^n et σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ alors
$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)} : (a_1, \ldots, a_n) \in A\} \in \mathrm{Def}(\mathfrak{M}).$$

La famille $\mathrm{Def}(\mathfrak{M})$ est en fait la plus petite famille de parties de $\bigcup_{n>0} M^n$, contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

Exemple 6.53. Soit K un corps commutatif considéré dans le langage $\mathcal{L}_{ann}$. La famille des ensembles atomiques de K est formée des parties définies par des équations polynômiales. Si on clôt par intersections finies, on obtient les *fermés de Zariski*. Alors si on clôt par combinaisons booléennes finies, on obtient les *ensembles constructibles*. Ceux-là ne sont pas en général clos par projection. Par contre c'est le cas si K est un corps algébriquement clos (Théorème de Tarski/Chevalley). Ce résultat correspond, d'un point de vue modèle théorique, à l'élimination des quanteurs dans les corps algébriquement clos (cf suite du cours). Les ensembles définissables d'un corps algébriquement clos sont donc exactement les ensembles constructibles.

Définition 6.54. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est *minimale* si M est infinie, et tout sous-ensemble définissable de M est fini ou co-fini.

Théorème 6.55. *Un goupe minimal est abélien, et soit d'exposant premier, soit divisible avec un nombre fini d'éléments d'ordre n pour tout $n > 0$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe définissable de G. Alors $G \setminus H$ est une réunion de translates de H. Donc si H est infini, $H = G$ par minimalité.
Supposons G non-abélien, et soit

$$Z(G) = \{g \in G : \forall\, h \in G\ gh = hg\}$$

le centre de G. Si $g \in G \setminus Z(G)$, alors le centralisateur

$$C_G(g) = \{h \in G : gh = hg\}$$

est un sous-groupe propre, et donc fini. Alors la classe de conjugaison

$$g^G = \{h^{-1}gh : h \in G\}$$

de g est infini, et donc co-fini. Si $h \in G \setminus Z(G)$ alors h^G lui aussi est infini et co-fini, et $g^G \cap h^G \neq \emptyset$. Ainsi $g^G = h^G$, et tous les éléments non-centraux sont conjugués.
Si pour un $g \in G \setminus Z(G)$ on a $g^2 \in Z(G)$, alors $g^2 \in Z(G)$ pour tout $g \in G \setminus Z(G)$, car ces éléments sont conjugués. Ainsi dans $G/Z(G)$ on a

$$\bar{g}\bar{h}\bar{g}\bar{h} = (\bar{g}\bar{h})^2 = \bar{1} = \bar{g}^2\bar{h}^2 = \bar{g}\bar{g}\bar{h}\bar{h}$$

et donc $\bar{h}\bar{g} = \bar{g}\bar{h}$. Ainsi $G/Z(G)$ est abélien, et l'application

$$x \mapsto [g, x] = g^{-1}x^{-1}gx$$

est un homomorphisme de noyau $C_G(g)$ et image contenu dans $Z(G)$. Or ces deux groupes sont propres et donc finis, une contradiction. Ainsi G est abélien.

Pour tout $n > 0$ on considère

$$nG = \{ng : g \in G\} \quad \text{et} \quad G[n] = \{g \in G : ng = 0\}.$$

Comme $x \mapsto nx$ donne un isomorphisme $nG \cong G/G[n]$, il est impossible que nG et $G[n]$ soient finis simultanément. Par minimalité, soit $nG = G$, soit $G[n] = G$.
Si $n > 0$ est minimal avec $nG \neq G$, alors $G[n] = G$ et $nG = \{0\}$; si $n = pq$ avec $p > 1$, alors $qG = G$ par minimalité de n, et donc $pG = pqG = nG = \{0\}$. Ainsi $p = n$ et G est d'exposant premier.
S'il n'y a pas de tel n, alors $nG = G$ pour tout $n > 1$ et G est divisible. De plus $G[n]$ est fini pour tout $n > 1$. □

On verra plus tard que dans le pur langage des groupes, un groupe abélien d'exposant premier ou divisible avec un nombre fini d'éléments d'ordre n pour tout $n > 0$ est minimal.

Conjecture 6.56 (Podewski)**.** Un corps minimal est algébriquement clos.

On verra plus tard que dans le pur langage des anneaux, un corps algébriquement clos est minimal.

Théorème 6.57. *Un corps minimal de caractéristique positive est algébriquement clos.*

Démonstration. Soit K un corps minimal de caractéristique $p > 0$, et soit $k = K \cap \mathbb{F}_p^{alg}$, où $\mathbb{F}_p^{alg}$ est la clôture algébrique du corps premier. Soit $\sigma : x \mapsto x^p$ l'endomorphisme de Frobenius. Alors $\sigma(K)$ est infini, égal à K par minimalité, et σ est en fait un automorphisme de K.
Si k n'est pas algébriquement clos, soit ℓ une extension de k de degré d. Comme k est réunion de corps finis, et les seules extensions algébriques des corps finis sont Galois et cycliques, $[\ell : k]$ est une extension cyclique et $k^d < k$. Or, si $\alpha \in K$ avec $\alpha^d \in k \leq \mathbb{F}_p^{alg}$, alors $\alpha \in K \cap \mathbb{F}_p^{alg} = k$. Ainsi $K^d < K$, une contradiction à la minimalité, car K^d est infini. Donc k est algébriquement clos.
Pour teminer, utilisons le test de Tarski pour montrer $k \preceq K$. Soit donc $D \subseteq K$ un ensemble k-définissable non-vide ; il faut montrer que $D \cap k \neq \emptyset$. Si D est infini, alors D est co-fini ; comme k est infini on a bien $k \cap D \neq \emptyset$. Si D est de cardinal k fini, soit $n < \omega$ tel que tous les paramètres pour définir D sont dans $\mathbb{F}_{p^n}$. Alors σ^n fixe ces paramètres et permute D. Donc $\sigma^{nk!}$ fixe D, et $D \subseteq \mathbb{F}_{p^{nk!}} \cap K \leq k$.
Comme k est algébriquement clos, pour tout $n > 0$ il satisfait l'énonce que tout polynôme de degré n à un zéro. Ceci est donc également vrai dans K, et K est algébriquement clos. □

Chapitre 7

Compacité, Théorème de Löwenheim-Skolem

Ce chapitre est consacré à un théorème fondamental en théorie des modèles, le théorème de compacité et à ses premières conséquences.

7.1 Ultraproduits

Commençons par une méthode pour obtenir de nouvelles structures, les *ultraproduits* qui sont des produits directs de structures quotientés par des ultrafiltres.
Rappelons la définition de filtres et ultrafiltres ainsi que quelques propriétés de ceux-ci vues au chapitre 5 : Soit I un ensemble infini. Un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de I est un filtre sur I si :
– $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
– si $X, Y \in \mathcal{F}$ alors $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
– si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subseteq Y$ alors $Y \in \mathcal{F}$.
Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est un filtre maximal pour l'inclusion, ce qui est équivalent à pour toute partie A de $\mathcal{U}$, A ou $I - A$ est dans $\mathcal{U}$.
Si $\mathcal{U}$ est ultrafiltre sur I alors
– soit $\mathcal{U}$ est un filtre principal $\mathcal{F}_a = \{A : a \in A\}$ pour un élément a de I ;
– soit $\mathcal{U}$ contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire l'ensemble des parties co-finies de I.
Enfin, à l'aide de l'axiome du choix, on vérifie que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (c'est en particulier le cas pour le filtre de Fréchet).
Définissons maintenant ce qu'on entend par ultraproduit :

Définition 7.1. Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. L'*ultraproduit* $\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$ est la structure $\mathfrak{M}$ suivante :

1. le domaine de $\mathfrak{M}$ est le produit des M_i modulo la relation d'équivalence suivante :

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Cette relation est de manière évidente réflexive et symétrique. La transitivité découle du fait que $\mathcal{U}$ est un filtre : on a $\{i \in I : a_i = c_i\} \supset \{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\}$. On notera $[a_i]_{i \in I}$ la classe modulo $\mathcal{U}$ de l'uple $(a_i)_{i \in I}$.

2. pour toute constante $c \in \mathcal{L}$, on pose $c^{\mathfrak{M}} := [c^{\mathfrak{M}_i}]_{i \in I}$.
3. pour toute fonction n-aire f de $\mathcal{L}$, on pose

$$f^{\mathfrak{M}} : ([a_i^1]_{i \in I}, \dots, [a_i^n]_{i \in I}) \mapsto [f^{\mathfrak{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]_{i \in I}.$$

4. pour toute relation n-aire R de $\mathcal{L}$, on pose

$$R^{\mathfrak{M}} := \{([a_i^1]_{i \in I}, \dots, [a_i^n]_{i \in I}) \in M^n : \{i \in I : (a_i^1, \dots, a_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Exercice 7.2. Vérifier que les fonctions et relations sont bien définies, c'est-à-dire qu'elle ne dépendent pas du choix des représentants. Noter de plus que la définition de $=^{\mathfrak{M}}$ correspond à la vraie égalité sur M.

Exercice 7.3. Que peut-on dire de l'ultraproduit si l'ultrafiltre est principal ?

Théorème 7.4 (Critère de Łos). *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I et $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Si $\bar{m} = ([m_i^1]_{i \in I}, ..., [m_i^n]_{i \in I})$ est un n-uple dans l'ultraproduit $\mathfrak{M} := \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / U$ et $\phi(\bar{x})$ est une formule, alors*

$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

En particulier si θ est un énoncé alors $\mathfrak{M}$ est modèle de cet énoncé si et seulement si il existe $X \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in X$, $\mathfrak{M}_i$ est un modèle de θ.

Démonstration. On commence par vérifier par induction sur la construction des termes que si $t(\bar{x})$ est un terme alors

$$t^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = [t^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i \in I}.$$

Par définition de l'ultraproduit, c'est évident si $t(\bar{x})$ est une constante ou une variable. Soient $t_1(\bar{x}), ..., t_k(\bar{x})$ des termes pour lesquels la propriété est vérifiée et $f \in \mathcal{L}$ une fonction k-aire. Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \{1, ..., k\}$,

$$t_j^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = [t_j^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n)]_{i \in I},$$

et par définition de l'ultraproduit,

$$\begin{array}{rcl} (f(t_1, ..., t_n))^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) & = & f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), ..., t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) \\ & = & [f^{\mathfrak{M}_i}(t_1^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n), ..., t_n^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i \in I} \\ & = & [f(t_1, ..., t_n)^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, ..., m_i^n))]_{i \in I}. \end{array}$$

On vérifie maintenant le critère de Łos par induction sur la construction des formules. Par définition de l'ultraproduit et par ce qui précède le critère est évident pour les formules atomiques.

Supposons le critère vérifié pour deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$. Alors $\mathfrak{M} \models (\phi \wedge \psi)(\bar{m})$ ssi

$$X := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad Y := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

Comme $\mathcal{U}$ est un filtre, $X \in \mathcal{U}$ et $Y \in \mathcal{U}$ est équivalent à $X \cap Y \in \mathcal{U}$. Or

$$X \cap Y = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models (\phi \wedge \psi)(m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U},$$

donc le critère est alors vérifié pour $(\phi \wedge \psi)$.
On a aussi $\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $X \notin \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre (c'est ici qu'un simple filtre ne suffit pas), $X \notin \mathcal{U}$ ssi $I \setminus X \in \mathcal{U}$. Or $I \setminus X = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \neg\phi(m_i^1, ..., m_i^n)\}$, donc le critère est également vérifié pour $\neg\phi$.
Supposons maintenant le critère vérifié pour une formule $\phi(y, \bar{x})$. Soit

$$X := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)\}.$$

Si $\mathfrak{M} \models \exists y \phi(y, \bar{m})$ alors il existe $[\bar{m}_i^0]_{i \in I} \in \mathfrak{M}$ tel que

$$\mathfrak{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i\in I}, [\bar{m}_i^1]_{i\in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i\in I}).$$

Par hypothèse,

$$Y := \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

Donc $X \in \mathcal{U}$ car $X \supset Y \in \mathcal{U}$. Réciproquement, si $X \in \mathcal{U}$, choisissons pour tout $i \in I$, $m_i^0 \in \mathfrak{M}_i$ tel que si $\mathfrak{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, ..., m_i^n)$ alors $\mathfrak{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)$. Alors

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, ..., m_i^n)\} = X$$

et donc, par hypothèse,

$$\mathfrak{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i\in I}, [\bar{m}_i^1]_{i\in I}, ..., [\bar{m}_i^n]_{i\in I}).$$

Le critère est alors vérifié pour la formule $\exists y \phi$. □

7.2 Le théorème de compacité

Théorème 7.5 (Compacité)**.** *Soit Σ un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle. Alors Σ a un modèle.*

Démonstration. Considérons Σ un ensemble d'énoncés finiment consistant. Pour toute partie finie i de Σ soit $\mathfrak{M}_i$ un modèle de i. Nous allons utiliser le critère de Łos pour montrer qu'un ultraproduit des $\mathfrak{M}_i$ est modèle de Σ.
Soit I l'ensemble des parties finies de Σ, et pour tout $i \in I$, soit $I_i := \{j \in I : j \supset i\}$. Alors $\mathcal{F} := \{X \subseteq I : X \supset I_i \text{ pour un } i \in I\}$ est un filtre sur I. En effet : $I_{\{\emptyset\}} = I \in \mathcal{F}$; $\emptyset \notin \mathcal{F}$; si $X \supset I_i$ et $Y \supset I_j$ alors $X \cap Y \supset I_{i \cup j}$; si $X \supset I_i$ et $X \subseteq Y$ alors $Y \supset I_i$.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{M}$ l'ultraproduit $\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$. Alors $\mathfrak{M}$ est un modèle de Σ : si $\theta \in \Sigma$ alors $\mathfrak{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in I_{\{\theta\}} \in \mathcal{U}$, donc par le critère de Łos $\mathfrak{M} \models \theta$. □

Exercice 7.6. Montrer que le théorème de compacité est équivalent à l'énoncé suivant : soient Σ un ensemble d'énoncés et ϕ une conséquence de Σ ($\Sigma \vdash \phi$) alors ϕ est conséquence d'une partie finie de Σ.

Exercice 7.7. A l'aide du théorème de compacité vérifier les assertions suivantes :

1. Une théorie qui, pour tout entier n, a un modèle de cardinalité plus grand que n, a un modèle infini.
2. Il n'existe pas de théorie dans la langage $\mathcal{L}_{ord}$ dont les modèles sont précisément les ordres finis.
3. Il n'existe pas de théorie dans la langage $\mathcal{L}_{ann}$ dont les modèles sont précisément les corps finis.

Le théorème de compacité s'exprime topologiquement de la façon suivante : nous munissons l'ensemble $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage $\mathcal{L}$ d'une topologie. A tout énoncé ϕ, on associe l'ensemble $[\phi]$ des théories complètes contenant ϕ. Alors les $[\phi]$ forment une base d'ouverts pour une topologie, car si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux énoncés, $[\phi_1] \cap [\phi_2] = [\phi_1 \wedge \phi_2]$. Muni de cette topologie, $\mathcal{T}$ est un espace séparé : si T_1 et T_2 sont deux théories complètes distinctes alors il existe un énoncé $\phi \in T_1$ tel que $\phi \notin T_2$. Donc $[\phi]$ et $[\neg\phi]$ sont des voisinages disjoints respectivement de T_1 et T_2. Cet espace $\mathcal{T}$ est de plus totalement discontinu, c'est-à-dire il admet une base d'ouverts qui sont fermés : le complémentaire de $[\phi]$ est $[\neg\phi]$. Par conséquent, toute partie connexe de $\mathcal{T}$ est soit vide, soit réduite à un point.

Théorème 7.8 (Compacité)**.** *L'espace $\mathcal{T}$ des théories complètes dans le langage $\mathcal{L}$ est compact.*

Exercice 7.9. Les deux énoncés ci-dessus du théorème de compacité sont équivalents.

Exercice 7.10. Les ouverts-fermés de $\mathcal{T}$ sont les parties de la forme $[\phi]$ pour ϕ un énoncé de $\mathcal{T}$.

Regardons maintenant un corollaire du théorème de compacité en termes d'ensembles définissables.

Corollaire 7.11 (Compacité)**.** Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $(\phi_i(\bar{x}, \bar{m}_i))_{i\in I}$. Si pour toute partie finie I_0 de I, il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que pour tout $i \in I_0$, $\mathfrak{M} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$ alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ et $\bar{a} \in N^n$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{N} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$.
En d'autres termes, si $(D_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de M^n définissables dans $\mathfrak{M}$ tel que toute intersection finie de parties de cette famille est non vide dans la structure $\mathfrak{M}$ alors cette famille a une intersection non vide dans une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Démonstration. Soit $\bar{c}$ un n-uple de nouvelle constante. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\phi_i(\bar{c}, \bar{m}_i) : i \in I\}$$

dans le langage $\mathcal{L} \cup \{m : m \in M\} \cup \{\bar{c}\}$. Alors par hypothèse, pour toute partie finie de Σ, il existe $\bar{a} \in M^n$ telle $\langle M, L, m, \bar{a} : m \in M\rangle$ soit modèle de cette partie finie. Donc par le théorème de compacité Σ est consistant. Soit $\mathfrak{N}$ un modèle de Σ alors l'interprétation des constantes $\{m : m \in M\}$ forme une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}'$, la structure sur N réduite au langage $\mathcal{L}$. Cette sous-structure est isomorphe à $\mathfrak{M}$ car $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$. Par un isomorphisme, on peut donc supposer que $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}'$ et l'interprétation $\bar{a} \in N^n$ de $\bar{c}$ dans $\mathfrak{N}$ implique que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{N}' \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$. □

Exemple 7.12.

1. **Les entiers non-standards** : il existe une extension élémentaire de la structure $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot\rangle$ contenant un entier (non-standard) non nul qui est divisible par tous les entiers standards non nuls (les entiers de $\mathbb{N}^*$).
2. **Les réels non-standards** : il existe une extension élémentaire $\mathbb{R}'$ de la structure $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <\rangle$ contenant un réel c (non-standard) strictement positif qui est **infiniment petit**, c'est-à-dire tel que pour tout réel r standard strictement positif ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$), $0 < c < r$. On a alors pour tout $r' \in \mathbb{R}'$ **borné** (tel qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ avec $-r_0 < r' < r_0$), il existe un unique réel standard $r \in \mathbb{R}$ **infiniment proche** de r'. On appelle r la **partie standard** de r'.

Lemme 7.13 (Théorème de l'extension élémentaire commune)**.** *Si $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes, elles ont une extension élémentaire «commune» : il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{N}$ telle que tous les $\mathfrak{M}_i$ se plongent élémentairement dans $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. On peut supposer que les domaines des $(M_i : i \in I)$ sont disjoints. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \bigcup_{i\in I} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i, M_i)$$

dans le langage $\mathcal{L} \cup \bigcup_{i\in I} M_i$. Remarquons que si $\mathfrak{N}$ est un modèle de Σ, alors l'application de $\mathfrak{M}_i$ dans $\mathfrak{N}$ avec $M_i \ni m \mapsto m^{\mathfrak{N}}$ est un plongement élémentaire. Nous allons donc montrer que Σ est consistant. Par compacité, il est suffisant de montrer que tout fragment fini de Σ est consistant. Un fragment fini Σ_0 de Σ est équivalent à une conjonction

$$\theta_{i_1}(\bar{m}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}(\bar{m}_{i_k}),$$

où $\theta_i(\bar{m}_i) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i, M_i)$. Alors $\mathfrak{M}_i \models \exists \bar{x}\theta_i(\bar{x})$ pour tout i ; commence $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_i$ sont élémentairement équivalentes, on a aussi $\mathfrak{M}_1 \models \exists \bar{x}\theta_i(\bar{x})$. Donc

$$\mathfrak{M}_1 \models \exists \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k\, (\theta_{i_1}(\bar{x}_1) \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}(\bar{x}_k)$$

et il y a $\bar{m}'_1, \ldots, \bar{m}'_k \in M_1$ tel que

$$\mathfrak{M}_1 \models \theta_{i_1}(\bar{m}'_1) \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}(\bar{m}'_k).$$

Alors en interprétant $\bar{m}_{i_j}$ par $\bar{m}'_j$ dans M_1 on obtient un modèle de Σ_0. □

7.3 Théorème de Löwenheim-Skolem, Catégoricité

Lemme 7.14 (Löwenheim-Skolem ascendant)**.** *Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure infinie alors pour tout cardinal $\kappa \geq \max\{|L|, |M|\}$ il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ de cardinal κ.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N}_0$ de $\mathfrak{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Pour cela considérons $(c_i)_{i\in\kappa}$ des nouveaux symboles de constantes et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Chaque fragment fini de Σ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qui peuvent être interprétés par des éléments distincts de $\mathfrak{M}$ car $\mathfrak{M}$ est infini. Donc Σ est finiment consistant et donc consistant par compacité. Un modèle $\mathfrak{N}_0$ de Σ est alors une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ de cardinal supérieur ou égal à κ. Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{N}_0$ contenant M et de cardinal κ, qui est alors une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$. □

Convention. Le cardinal d'une théorie T dans un langage $\mathcal{L}$, notée $|T|$ est par convention le cardinal de l'ensemble des formules du langage $\mathcal{L}$, c'est-à-dire $|T| := \max\{\omega, |L|\}$. En particulier on dit que T est dénombrable si $|L| \leq \omega$.

Théorème 7.15 (Théorème de Löwenheim-Skolem)**.** *Si T est une théorie qui a un modèle infini alors T a un modèle de cardinal κ pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$.*

Démonstration. Par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, il existe une structure N de cardinal κ élémentairement équivalente à M. □

Définition. Une théorie T est *κ-catégorique* si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ. Une théorie est *totalement catégorique* si T est κ-catégorique pour tout κ infini.

Proposition 7.16. *Une théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ-catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |T|$ est complète.*

Démonstration. Soit M le modèle de T de cardinal κ. Toujours par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, tout modèle de T est élémentairement équivalent à une structure de cardinal κ, donc à M. □

Exemple 7.17. – La théorie des ensembles infinis est totalement catégorique.
– La théorie des ordres totaux denses sans extrémité est ω-catégorique (voir exo 6.31). Par contre cette théorie n'est pas κ-catégorique pour tout cardinal $\kappa > \aleph_0$. Considérons par exemple un ordre I total dense sans extrémité de cardinal κ tel que pour chaque point de cet ordre, il y a κ points plus grand (par exemple $\kappa \times \mathbb{Q}$ avec ordre lexicographique). Prolongeons cet ordre par l'ensemble des rationnels. Alors les ordres I et $I \frown \mathbb{Q}$ ne sont évidemment pas isomorphes.

– Soit $p \geq 0$. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet si K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinal $\kappa > \omega$, ils sont tous deux de degré de transcendance κ et donc isomorphes. Par contre cette théorie n'est pas $\aleph_0$-catégorique. En effet, il y a $\aleph_0$ modèles dénombrables non-isomorphes, déterminés par le degré de transcendance sur le corps premier.
– La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux est également catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet tout groupe abélien divisible sans torsion peut être regardé comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et un groupe abélien divisible sans torsion de cardinal $\kappa > \omega$ aura pour dimension κ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Par contre cette théorie n'est pas $\aleph_0$-catégorique.
– La théorie des groupes abéliens d'exposant p premier est totalment catégorique. En effet tout groupe abélien d'exposant p de cardinal κ infini peut être regardé comme un $\mathcal{F}_p$-espace vectoriel et aura pour dimension κ comme $\mathcal{F}_p$-espace vectoriel.

Exercice 7.18. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ-catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 7.19. Soit $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage $\mathcal{L}$ qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ.
2. Montrer que T est complète.

Pour terminer cette partie nous allons énoncer le théorème de Morley qui est le point de départ de la théorie de la stabilité. La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours.

Fait 7.1 (Théorème de Morley 1965)**.** *Une théorie dénombrable qui est catégorique en un cardinal infini non-dénombrable est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable.*

7.4 Applications en algèbre

Nous commençons par un résultat de transfert de caractéristique positive en caractéristique zéro.

Théorème 7.20 (Principe de Transfert)**.** *Soit ϕ un énoncé dans le langage des anneaux. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle ;*
2. *ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.*

3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour une infinité de nombres p premier.

Démonstration. Soi $\mathcal{P}$ l'ensembles des nombres premiers, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$. Pour $p \in \mathcal{P}$ soit K_p un coprs algébriquement clos de caractéristique p. Alors l'ultraproduit $K = \prod_{\mathcal{P}} K_p/\mathcal{U}$ est un corps algébriquement clos comme chaque K_p satisfait CAC, la théorie des corps algébriquement clos. En plus, pour tout $n > 0$ presque tout K_p satisfait l'énoncé $n = 1 + \cdots + 1 \neq 0$. Donc K est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.
Soit $I \subseteq \mathcal{P}$ un ensemble infini tel qu'il y ait un corps K_p algébriquement clos de caractéristique p satisfaisant ϕ. On considère un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant I. Par le critère de Łos ϕ est satisfaite dans K, et donc dans tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro, puisque CAC_0 est complète. Il est donc impossible que $\neg\phi$ puisse être vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinite de p différents, car sinon tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro satisfaisait à la fois ϕ et $\neg\phi$. □

Nous allons en déduire un théorème d'Ax.

Théorème 7.21 (Ax 1969 [1]). *Soit f une application polynômiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ pour $m > 0$. Si f est injective alors f est surjective.*

Démonstration. Soit $m > 0$ et f une application polynômiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$. Soit k le degré de f. Considérons I la partie finie de $\mathbb{N}^m$ constituée des uples $i = (i_1, \dots, i_m)$ vérifiant $i_1 + i_2 + \ldots + i_m \leq k$.
Notons $\phi_k\left((a_i^j)_{i \in I, j \in \{1,\dots,m\}}, y_1, \dots, y_m\right)$ le terme du langage des anneaux

$$\left(\sum_{i \in I} a_i^1 y_1^{i_1} \dots y_m^{i_m}, \dots, \sum_{i \in I} a_i^m y_1^{i_1} \dots y_m^{i_m}\right) .$$

Maintenant, considérons l'énoncé θ_k suivant :

$$\forall_{i \in I, j \leq m} a_i^j \left(\forall y_1 \dots y_m \forall z_1 \dots z_m \ \phi_k((a_i^j), y_1, \dots, y_m) = \phi_k((a_i^j), z_1, \dots, z_m)) \to \bigwedge_{i \in I} (y_i = z_i)\right) \to$$

$$\left(\forall r_1 \dots r_m \, \exists s_1 \dots s_m \ \phi_k((a_i^j), s_1, \dots, s_m) = (r_1, \dots, r_m)\right) .$$

L'énoncé θ_k interprété dans un anneau A signifie « pour toute application polynômiale P de degré inférieur ou égal à k de A^m dans A^m si P est injective alors P est surjective ».

Cet énoncé est évidemment vérifié dans tout corps fini.

1. Ax a en fait montré plus généralement que tout endomorphisme injectif d'une variété algébrique est surjective.

Soit p un nombre premier. Rappelons que le corps fini $\mathbb{F}_p(=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet à isomorphisme près une unique clôture algébrique $\tilde{\mathbb{F}}_p$ et que

$$\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_{p^n}$$

où $\mathbb{F}_{p^n} := \{x \in \mathbb{F}_p \colon x^{p^n} = x\}$ est l'unique sous-corps de cardinal p^n de $\tilde{\mathbb{F}}_p$. Considérons g une fonction polynômiale injective de $(\tilde{\mathbb{F}}_p)^m$ vers $(\tilde{\mathbb{F}}_p)^m$. Alors il existe $j > 0$ tel que cette fonction polynômiale est à coéfficient dans $\mathbb{F}_{p^j}$. Cette fonction définit alors une bijection de $\mathbb{F}_{p^{nj}}$ vers $\mathbb{F}_{p^{nj}}$ pour tout entier $n > 0$. Comme $\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_{p^{nj}}$ on en déduit que g est surjective sur $\tilde{\mathbb{F}}_p$. L'énoncé θ_k est donc satisfait par $\tilde{\mathbb{F}}_p$.
La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p étant complète, cette énoncé est en fait satisfait par tout corps algébriquement clos de caractéristique p. On conclut en utilisant le principe de transfert. □

Chapitre 8

Types et élimination des quanteurs

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de types, notion centrale en théorie des modèles pour l'étude des structures. Nous verrons leur utilisation pour l'élimination des quanteurs et nous traiterons l'exemple des corps algébriquement clos. Dans le chapitre suivant, nous parlerons de la question de la réalisation et de l'omission des types.

8.1 Types

Commençons par deux exemples.

Exemple 8.1.

1. Soit $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Les uples $(2, 5, 9)$ et $(3, 4, 8)$ satisfont les mêmes formules sans quanteurs dans $\mathfrak{M}$ car on a $2 < 5 < 9$ et $3 < 4 < 8$. On dira que ces deux uples ont même type sans quanteurs. Par contre, si on pose $\phi(x, y, z) = \exists t \; x < t < y$ alors $\mathfrak{M} \models \phi(2, 5, 9)$ mais $\mathfrak{M} \models \neg\phi(3, 4, 8)$. On dira que ces deux uples n'ont pas même type. En étudiant plus précisément la théorie des ordres discrets, on pourra vérifier que les uples $(5, 9)$ et $(4, 8)$ satisfont les même formules car il y a le même nombre d'éléments entre 5 et 9 qu'entre 4 et 8.
2. Soit $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Les uples $(1, \pi, \mathrm{e})$ et $(\sqrt{2}, 8, 7)$ satisfont les mêmes formules dans $\mathfrak{N}$. En effet comme $1 < \mathrm{e} < \pi$ et $\sqrt{2} < 7 < 8$, on peut faire correspondre par un va-et-vient ces deux uples. On dira que ces deux uples ont même type.

Définition 8.2. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un n-uple de M.

1. Le *type sans quanteurs* de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathfrak{M}$) est l'ensemble des $\mathcal{L}(A)$-formules sans quanteurs satisfaites par $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble

   $$\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ formules sans quanteurs de } \mathcal{L}(A) \colon \mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

2. Le *type* de $\bar{a}$ sur A (dans $\mathfrak{M}$) est l'ensemble des $\mathcal{L}(A)$-formules satisfaites par $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble

   $$\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ formules de } \mathcal{L}(A) \colon \mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

3. Plus généralement, un *n-type* (*sans quanteurs*) *sur A* est un ensemble maximal de $\mathcal{L}(A)$-formules (sans quanteurs) en variables libres $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ telle que toute partie finie ait une réalisation dans $\mathfrak{M}$. L'ensembles des n-types sur A est noté $S_n(A)$ (où le modèle ambient $\mathfrak{M}$ est omis de la notation).
4. Si p est un type et $\bar{a}$ satisfait toutes les formules de p, on dit que $\bar{a}$ est une *réalisation* de p, ou que $\bar{a}$ *réalise* p.

Si T est une théorie, on note $S_n(T)$ l'ensemble de tous les types sur $\emptyset$ dans tous les modèmes de T. On pose $S(T) = \bigcup_{n<\omega} S_n(T)$ et $S(A) = \bigcup_{n<\omega} S_n(A)$.

Evidemment, un type au sens de 1. ou 2. est un type au sens de 3. Notons que le type sans quanteurs est déterminé par le type atomique, c'est-à-dire l'ensemble des formules atonique satisfaites par $\bar{a}$.

Remarque. Soit $p(\bar{x})$ un type sur $A \subseteq \mathfrak{M}$, et $\phi(\bar{x})$ une formule telle que ni ϕ ni $\neg\phi$ est dans p. Par maximalité on trouve des sous-ensembles finis π_0 et π_1 de p tels que ni $\pi_0(\bar{x}) \cup \{\phi(\bar{x})\}$, ni $\pi_1(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$. Mais $\pi_0(\bar{x}) \cup \pi_1(\bar{x})$ a une réalisation $\bar{a}$ dans $\mathfrak{M}$; comme soit $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$, soit $\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a})$, on obtient une contradiction. Donc pour toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\phi(\bar{x})$ soit ϕ, soit $\neg\phi$ est dans p.

Remarque. Comme il y a au plus $|\mathcal{L}| + |A| + \omega$ formules avec paramètres dans A, il y a au plus $2^{|\mathcal{L}|+|A|+\omega}$ types sur A.

Remarque. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures, $A \subseteq M$ et $\bar{a} \in M^n$.
– Si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.
– Si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}$ alors $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.

Par exemple si $\mathfrak{M} = \langle 2\mathbb{Z}, < \rangle$ et $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(0,2) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(0,2)$ mais $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(0,2) \neq \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(0,2)$.

Exemple 8.3. Dans la théorie des ordres totaux denses sans extrémité, un 1-type sur A correspond à la coupure qu'il détermine sur A. En particulier les 1-types sur $\mathbb{Q}$ correspondent aux coupures :

1. $\{x = q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
2. $\{q < x < q' \colon q' > q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
3. $\{q' < x < q \colon q' < q\}$ pour $q \in \mathbb{Q}$,
4. $\{q' < x < q \colon q' < r < q\}$ pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
5. $\{x > q \colon q \in \mathbb{Q}\}$,
6. $\{x < q \colon q \in \mathbb{Q}\}$.

Exemple 8.4. Dans la théorie d'un corps algébriquement clos K un 1-type p sur un sous-corps k est déterminé
– soit par le polynôme minimal sur k d'une réalisation de p (types des éléments algébriques sur k),

– soit par l'ensemble $\{P(x) \neq 0 : P \in k[X]\}$ (type des éléments transcendants sur k).

Proposition 8.5. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $p \in S_n(A)$. Alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un n-uple $\bar{a}$ in N tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.*

Démonstration. On considère $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$, où $\bar{c}$ sont des nouvelles constantes. Puisque toute partie finie de p a une réalisation dans $\mathfrak{M}$, toute partie finie de Σ est realisable dans $\mathfrak{M}$ en interprétant $\bar{c}$ par un n-uple convenable de M. Donc Σ a un modèle $\mathfrak{N}$. Comme $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$, il est extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ (en identifiant $M \ni m$ et $m^{\mathfrak{N}}$). On pose $\bar{a} = \bar{c}^{\mathfrak{N}}$; il est évident que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A) = p$. □

Exercice 8.6. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et p un type sans quanteurs sur A. Alors il existe une extension $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ qui réalise p.

Définition 8.7. On dit qu'un isomorphisme partiel de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un ∞-*isomorphisme* s'il appartient à une famille Karpienne d'isomorphismes partiels de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire s'il est prolongeable par va-et-vient.

Il suit des définitions et de la proposition 6.29 que

Proposition 8.8. *Soit σ un isomorphisme partiel de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$. Alors $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$ pour tout $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(\sigma)^n$. De plus si σ est un ∞-isomorphisme, alors $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{a}))$.*

Réciproquement deux uples qui ont même type, sont en fait conjugués par un automorphisme d'une extension élémentaire. Tout d'abord, remarquons que si $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures et $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in M^n$ tels que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$ alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes. En effet, tous les énoncés satisfaits par $\mathfrak{M}$ sont par définition parmi les formules de $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a})$. On peut donc supposer par la propriété de plongement commun (lemme 7.13) que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont dans la même structure.

Proposition 8.9. *Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$, et $A \subseteq M$. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type sur A si et seulement s'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un automorphisme σ de $\mathfrak{N}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.*

Démonstration. $(\Leftarrow)$ est évident.
$(\Rightarrow)$: construisons une chaîne d'extensions élémentaires

$$\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq .... \preccurlyeq \mathfrak{M}_n \preccurlyeq ...$$

avec $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ et une chaîne

$$\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq ... \subseteq \sigma_n \subseteq \cdots$$

d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathfrak{M}_i \to \mathfrak{M}_i$ telle que σ_0 est l'unique isomorphisme de la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{a}\}$ sur la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{b}\}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$, et telle que pour tout $i < \omega$ le domaine de σ_{2i+1} contient $\mathfrak{M}_{2i}$ et l'image de σ_{2i+2} contient $\mathfrak{M}_{2i+1}$. Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 8.10. *Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure et $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ est un isomorphisme partiel élémentaire alors il existe une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$ et un isomorphisme partiel élémentaire $\tau : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ de domaine $\mathfrak{M}$ qui prolonge σ.*

Démonstration. Associons à chaque $m \in \mathfrak{M}$ une nouvelle constante m' et considérons l'ensemble des énoncés suivants dans le langage $\mathcal{L} \cup \{m, m' \colon m \in M\}$,

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\phi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Montrons que Σ est consistant. Pour cela considérons en une partie finie

$$\Sigma_0 := \theta(\bar{m}) \cup \{\phi(\bar{m}_i', \sigma(\bar{n}_i)) : i \in I\}.$$

Alors

$$\mathfrak{M} \models \exists (\bar{x}_i)_{i\in I} \wedge_{i\in I} \phi(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i)), \quad \text{car} \quad \mathfrak{M} \models \exists (\bar{x}_i)_{i\in I} \wedge_{i\in I} \phi(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$$

et σ est élémentaire. On peut donc interpréter les m' dans $\mathfrak{M}$ tel que $(\mathfrak{M}, M, M') \models \Sigma_0$. Par compacité il existe un modèle $\mathfrak{N}$ de Σ ; comme $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M)$ il est extension élémentaire de $\mathfrak{M}$. Considérons $\tau : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ la fonction qui à $m \in M$ associe $m' \in N$. Alors τ prolonge σ et est un isomorphisme partiel : pour tout $\bar{m} \in \mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{N} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathfrak{N} \models \phi(\tau(\bar{m})).$$

□

Revenons à la construction de nos chaînes : aux étapes paires on prolonge σ_{2i} et aux étapes impaires σ_{2i+1}^{-1}. Les chaînes construites, on vérifie que $\bigcup_{i\in\omega} \sigma_i$ est un automorphisme de $\bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{M}_i$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. □

Exercice 8.11. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. Alors un n-type $p(\bar{x})$ n'est rien d'autre qu'une $\mathcal{L}(\bar{c})$-théorie qui étend $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, où l'on a substitué $\bar{x}$ pour $\bar{c}$.

Exercice 8.12 (Svenonius)**.** Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ un ensemble de paramètres et D une partie de M^n définissable dans $\mathfrak{M}$. Alors D est définissable à paramètres dans A si et seulement si D est invariant par tout automorphisme fixant A de toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Comme pour les théories on peut munir $S_n(A)$ d'une topologie, en prenant les ensembles

$$[\phi] = \{p \in S_n(A) \colon \phi \in p\}$$

comme base de fermés, pour $\phi \in \mathcal{L}(A)$ avec variables libres $x_1, \ldots, x_n$. Puisque $[\neg\phi]$ est le complément de $[\phi]$, c'est une base d'ouvert-fermés, et la topologie est totalement discontinue. Le théorème de compacité nous dit que $S_n(A)$ est compact.
Plus généralement, on peut considérer des types en une infinité de variables libres $(x_i : i < \alpha)$; tout le développement précédent va aussi bien pour eux.

8.2 Elimination des quanteurs

Quand on considère une théorie sur un langage donné, il est intéressant d'isoler un sous-ensemble des formules du premier ordre suffisant pour décrire les ensembles définissables dans les modèles de cette théorie. L'étude des propriétés des modèles en question s'avère ainsi simplifiée. Le cas particulier de l'élimination des quanteurs est le cas où toute formule est équivalente modulo la théorie à une formule sans quanteurs.

Définition 8.13. Une théorie T *élimine les quanteurs* si pour tout $n > 0$ et toute formule $\psi(\bar{x})$ où $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ il existe une formule $\phi(\bar{x})$ sans quanteur telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Notons que si une théorie T élimine les quanteurs alors tout type d'un uple dans un modèle de T est déterminé par le type sans quanteurs de cet uple. Réciproquement, pour vérifier l'élimination des quanteurs (ou plus généralement l'élimination à un sous-ensemble de formules), on utilisera la méthode de va-et-vient afin de montrer que deux uples ayant même type sans quanteurs ont même type et on pourra conclure à l'aide de la caractérisation suivante.

Proposition 8.14. *Soit T une théorie et Φ un ensemble non vide de formules de $\mathcal{L}$ tels que pour tout entier $n > 0$, deux n-uples extraits de modèles de T ont même types dès qu'ils satisfont les mêmes formules de Φ. Alors pour toute formule $\psi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$ il existe une combinaison booléenne $\phi(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que*

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})).$$

En particulier si pour tout $n > 0$, tout $\mathfrak{M} \models T$, tout $\mathfrak{N} \models T$, tout $\bar{a} \in M^n$ et tout $\bar{b} \in M^n$ l'égalité $\mathrm{tpsq}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tpsq}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$ *implique que* $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$*, alors T élimine les quanteurs.*

Démonstration. Soit $\psi(\bar{x})$ une formule de $\mathcal{L}$ avec $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Si ψ n'est satisfaite dans aucun modèle de T, on considère une formule θ de Φ et on a

$$T \vdash \forall \bar{x}\, [\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (\theta(\bar{x}) \wedge \neg\theta(\bar{x}))]$$

Sinon, soit $\mathfrak{M} \models T$ et $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})$. Il existe alors une combinaison booléenne $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $\mathfrak{M} \models \phi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et

$$T \vdash \forall \bar{x}(\phi_{\bar{a}}(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})).$$

En effet, considérons $\bar{c}$ un n-uple de nouvelles constantes. Alors l'ensemble d'énoncés

$$T \cup \{\phi(\bar{c})\colon \phi \in \Phi \text{ et } \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})\} \cup \{\neg\phi(\bar{c})\colon \phi \in \Phi \text{ et } \mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}$$

est inconsistant par hypothèse. Par compacité une partie finie est inconsistante, ce qui nous donne une combinaison booléenne $\phi_{\bar{a}}(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $\mathfrak{M} \models \phi_{\bar{a}}(\bar{a})$ et $T \cup \{\phi_{\bar{a}}(\bar{c})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c})\}$ est inconsistant.

Soit maintenant $(\mathfrak{M}_i, \bar{a}_i)_{i\in I}$ une énumération de tous les types possibles d'un n-uple dans un modèle $\mathfrak{M}_i$ de T tel que $\mathfrak{M}_i \models \psi(\bar{a}_i)$. Alors

$$T \cup \{\neg\phi_{\bar{a}_i}(\bar{c})\colon i \in I\} \cup \{\psi(\bar{c})\}$$

est inconsistant. Par compacité, il existe donc I_0 fini tel que

$$T \vdash \forall\bar{x}\,[\psi(\bar{x}) \to \bigvee_{i\in I_0} \phi_{\bar{a}_i}(\bar{x})].$$

Alors ψ est équivalente modulo T à $\bigvee_{i\in I_0} \phi_{\bar{a}_i}$. □

Exemple 8.15. Considérons la théorie T de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies dans le langage $\mathcal{L} = \{E\}$. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux modèles de T. On vérifie alors que les isomorphismes partiels de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$ à domaine fini forment une famille Karpienne. On en déduit que T est complète et élimine les quanteurs. En particulier :
- Il y a un unique 1-type.
- Il y a trois 2-types : le type déterminé par $x_1 = x_2$, celui déterminé par $(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2)$ et enfin celui déterminé par $\neg E(x_1, x_2)$.

On peut remarquer que tout type de $S(T)$ est réalisé dans tout modèle de T.

Exemple 8.16. Soit K un corps. On exprime la théorie T des K-espaces vectoriels infinis dans le langage $\mathcal{L}_K := \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ où pour tout $k \in K$, λ_k est une fonction unaire qui est interprétée dans un K-espace vectoriel par la multiplication par k. Alors T est complète et élimine les quanteurs : soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de dimension infini et considérons $\mathcal{F}$ la famille des isomorphismes partiels ayant pour domaine un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ est non vide et on vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est un va-et-vient entre V_1 et V_2. Donc T est complète. De plus T élimine les quanteurs car si $\bar{a} \in V_1$ et $\bar{b} \in V_2$ satisfont les mêmes équations linéaires alors les sous-espaces vectoriels engendrés par $\bar{a}$ et respectivement par $\bar{b}$ sont isomorphes.

Remarque. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux correspond à la théorie des $\mathbb{Q}$-e.v. infinis : on définit dans un groupe divisible sans torsion $\lambda_{p/q}$ par $px = qy$ qui est une formule sans quanteur. On en déduit que cette théorie élimine elle aussi les quanteurs.

Exercice 8.17. La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quanteurs.

Définition 8.18. Une théorie T est *modèle-complète* si toute inclusion de modèles de T est élémentaire.

Proposition 8.19. *Une théorie qui élimine les quanteurs est modèle-complète.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et $\phi(\bar{m})$ un énoncé à paramètres dans $\mathfrak{M}$. Alors $\phi(\bar{x})$ est équivalent dans tout modèle de T à une formule $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs, et

$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(\bar{m}).$$

□

Exemple 8.20. La $\mathcal{L}_{ann}$-théorie de $\mathbb{R}$ est modèle-complète, mais n'élimine pas les quanteurs : $\exists y\, y^2 = x$ n'est pas équivalente à une formule sans quanteurs. Par contre, $\mathbb{R}$ élimine les quanteurs si on rajoute l'ordre au langage.

On voit que les propriétés d'élimination dépendent du langage choisi !

Remarque (Morleyisation)**.** Soit T une théorie quelconque. Pour toute formule $\phi(\bar{x})$ on rajoute une nouvelle relation $R_\phi(\bar{x})$ au langage, et l'axiome $\forall \bar{x}\, [\phi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\phi(\bar{x})]$ à la théorie, pour former le langage $\mathcal{L}'$ et la théorie T'. Alors T' elimine facilement les quanteurs : une $\mathcal{L}$-formule ϕ est équivalente à R_ϕ ; quant aux $\mathcal{L}'$-formules on remplace d'abord les éventuelles sous-formules R_ψ par ψ pour obtenir une $\mathcal{L}$-formule équivalente. Ceci a pour effet de changer la notion de sous-structure : si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, ils ont des expansions canoniques a des modèles de T' en interpretant

$$R_\phi^{\mathfrak{M}} := \{\bar{m} \in M : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

(et similairement pour $\mathfrak{N}$). Mais comme $\mathcal{L}'$-structures on a $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ si et seulement si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Théorème 8.21. *Une théorie est modèle-complète si et seulement si toute formule est équivalente modulo T à une formule existentielle.*

Donc pour une théorie modèle-complète, les formules existentielles forment un ensemble d'élimination, où on n'a même pas besoin des combinaisons booléennes. (Comme $\exists x \phi(x) \wedge \exists y \psi(y)$ est équivalent à $\exists x \exists y\, (\phi(x) \wedge \psi(y))$, et $\exists x \phi(x) \vee \exists y \psi(y)$ est équivalente à $\exists x \exists y\, (\phi(x) \vee \psi(y))$, ça signifie qu'on peut supprimer le quanteur universel dans la forme prénexe.)

Démonstration. Si toute formule est équivalente à une formule existentielle, considérons deux modèles $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et une formule $\phi(\bar{m})$ vraie dans $\mathfrak{M}$. Elle est équivalente à une formule $\exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$, et on trouve $\bar{n} \in M$ tels que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$. Donc $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$, et $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m})$. On a bien $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.
Réciproquement, supposons que T soit modèle-complète, et considérons deux modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T, ainsi que deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$. Supposons que les formules existentielles satisfaites par $\bar{m}$ dans $\mathfrak{M}$ forment un sous-ensemble des formules existentielles satisfaites par $\bar{n}$ dans $\mathfrak{N}$. Soient $\{c_m : m \in M\}$ des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, N) \cup \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}, \bar{n}) : \mathfrak{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_k, \bar{m}), \phi \text{ atomique}\}.$$

Chaque sous-ensemble fini $\Phi_0(\bar{c},\bar{n})$ de Φ est interpretable dans $\mathfrak{N}$, comme

$$\mathfrak{M} \models \exists\bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x},\bar{m}) \quad \text{implique} \quad \mathfrak{N} \models \exists\bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x},\bar{n}).$$

Donc il y a un modèle $\mathfrak{N}'$ de Φ, extension élémentaire de $\mathfrak{N}$, qui contient une copie de $\mathfrak{M}$, l'ensemble $\mathfrak{M}' = \{c_m^{\mathfrak{N}'} : m \in M\}$, comme sous-structure ; notons que l'uple correspondant à $\bar{m}$ est $\bar{n}$. Par modèle-complétude $\mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{N}'$. Pour chaque formule on a

$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \phi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N}' \models \phi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(\bar{n}).$$

Donc $\bar{m}$ et $\bar{n}$ satisfont les mêmes formules. Par la proposition 8.14 chaque formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules existentielles.
Il nous reste de voir qu'une formule universelle $\phi(\bar{x})$ est équivalente à une formule existentielle. Soit $\Phi(\bar{x})$ la collection des formules existentielles en $\bar{x}$ qui impliquent $\phi(\bar{x})$ modulo T, et

$$\Psi(\bar{x}) = \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})\}.$$

Soient $\bar{c}$ des nouvelles constantes, et supposons que

$$T \cup \Psi(\bar{c}) \cup \{\phi(\bar{c})\}$$

a un modèle $\mathfrak{M}$. Si $\Phi_0(\bar{x})$ est la collection des formules existentielles satisfaites par $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$, alors $T\cup\Phi_0(\bar{d})\cup\{\neg\phi(\bar{d})\}$ n'a pas de modèle ($\bar{c}$ et $\bar{d}$ doivent satisfaire les mêmes formules par la première partie de la preuve), et il y a une partie finie $\Phi_0'(\bar{d}) \cup \{\neg\phi(\bar{d})\}$ qui est inconsistante avec T. Mais ça signifie que $\psi(\bar{x}) := \bigwedge \Phi_0'(\bar{x})$ implique $\phi(\bar{x})$ modulo T. Donc $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, et $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\bar{c})$, en contradiction avec $\mathfrak{M} \models \Phi_0'(\bar{c})$.
Il y a donc une partie finie $\Psi_0(\bar{x})$ de $\Psi(\bar{x})$ telle que $T\cup\Psi_0(\bar{x})\cup\{\phi(\bar{x})\}$ est inconsistant. Donc $\bigwedge \Psi_0(\bar{x})$ implique $\neg\phi(\bar{x})$ modulo T, et $\phi(\bar{x})$ implique

$$\psi_0(\bar{x}) := \bigvee\{\psi(\bar{x}) : \neg\psi(\bar{x}) \in \Psi_0(\bar{x})\}$$

modulo T. Comme $\psi(\bar{x})$ implique $\phi(\bar{x})$ modulo T pour toute $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, la formule $\phi(\bar{x})$ est équivalente à $\psi_0(\bar{x})$. □

8.3 Les corps algébriquement clos

Nous vérifions dans cette section que la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs et nous en déduisons une preuve du théorème des zéros de Hilbert.

Proposition 8.22. *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs (dans le langage des anneaux $\mathcal{L}_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$).*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples satisfaisant les mêmes formules atomiques. Dans ce cas K_1 et K_2 ont même caractéristique car $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ est une formule atomique pour tout p. De plus $\bar{a}$ et

$\bar{b}$ satisfont les mêmes équations polynomiales sur le corps premier, donc ils engendrent deux sous-corps k_1 et k_2 isomorphes. On peut supposer, en passant à des extensions élémentaires, que K_1 et K_2 sont de degré de transcendance infini. On a vu (voir exemple 6.10) qu'il existe alors un va-et-vient de K_1 sur K_2 contenant l'isomorphisme de k_1 sur k_2 qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. □

Lemme 8.23. *Soit S un système fini d'équations et d'inéquations (en plusieurs inconnues), à coefficients dans un corps k. Si S a une solution dans une extension K de k, il a une solution dans toute extension algébriquement close de k.*

Démonstration. On peut voir S comme une formule sans quanteur $\phi(x_1, ..., x_n, b_1, ..., b_m)$ dans le langage des anneaux où les x_i correspondent aux inconnues et les b_i sont les coefficients dans le corps k. Alors il existe $\bar{a} \in K$ tel que $K \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Soit K_1 une extension de K algébriquement close. Comme ϕ est sans quanteur, $K_1 \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$.
Considérons une autre extension K_2 de k algébriquement close. Alors les clôtures algébriques $\bar{k}_1$ de k dans K_1 et $\bar{k}_2$ de k dans K_2 sont isomorphes au-dessus de k. Comme la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs, $\bar{k}_1 \preccurlyeq K_1$ et $\bar{k}_2 \preccurlyeq K_2$ et donc comme $K_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ on a $\bar{k}_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$, d'où $\bar{k}_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ et $K_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$. □

Théorème 8.24 (Théorème des zéros de Hilbert)**.** *Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ et $P \in K[X_1, ..., X_n]$. Supposons que pour tout $\bar{a} \in K^n$, si $Q(\bar{a}) = 0$ pour tout $Q \in I$ alors $P(\bar{a}) = 0$. Alors il existe m tel que $P^m \in I$.*

Démonstration. Supposons que pour tout m, $P^m \notin I$ et soit J un idéal contenant I mais aucun des P^m, maximal pour ces propriétés. On vérifie facilement que J est premier. Soit $\mathcal{L}$ le corps de fractions de $K[X_1, ..., X_n]/J$. Alors $\mathcal{L}$ contient K. Soit $Q_1, ..., Q_r$ des générateurs de J. Alors la système $S := \{Q_1 = 0, ..., Q_r = 0, P \neq 0\}$ a une solution dans $\mathcal{L}$ et donc d'après le lemme précédent une solution dans K, mais cette solution contredit l'hypothèse. □

Chapitre 9

Modèles atomiques, modèles saturés

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des modèles réalisant peu, ou beaucoup de types.

9.1 Types isolés et omission de types

Définition 9.1. Un type $p(\bar{x})$ sur A est *algébrique* s'il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ qui n'a qu'un nombre fini de réalisations. Un uple $\bar{a}$ est *algébrique sur* A si $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ l'est.

Exercice 9.2. Un uple $\bar{a}$ est algébrique sur A si et seulement s'il est contenu dans chaque sous-structure élémentaire contenant A de toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Nous avons vu qu'on peut toujours trouver un modèle qui réalise un type. Mais est-ce qu'on peut en trouver un qui ne le réalise pas ?

Définition 9.3. Un type $p(\bar{x})$ sur A est *principal*, ou *isolé*, s'il y a une formule $\phi(\bar{x})$ dans $p(\bar{x})$ telle que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\phi(\bar{x})\} \models p(\bar{x})$. Dans ce cas, la formule $\phi(\bar{x})$ *isole* $p(\bar{x})$ sur A.

Une reformulation nous donne : $\phi(\bar{x})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ si et seulement si

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\phi(\bar{a})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}).$$

Topologiquement, $\phi(\bar{x})$ *isole* $p \in S_n(T)$ si p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant $\phi(\bar{x})$, c'est-à-dire si l'ouvert fermé $[\phi(\bar{x})]$ de $S_n(T)$ isole p.

Exercice 9.4. Un type algébrique est isolé.

Lemme 9.5. $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$ *est isolé ssi* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$ *et* $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ *le sont.*

Démonstration. Si $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$, alors $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$, et $\exists \bar{x}\, \phi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$. Réciproquement, si $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$ et $\psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, alors

$$\mathrm{Th}(M, A) \cup \{\psi(\bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \cup \{\phi(\bar{a}, \bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}\bar{b})\}.$$

Donc $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$. $\square$

Il est évident qu'un type principal est réalisé dans chaque modèle contenant A, comme $\exists \bar{x}\, \phi(\bar{x})$ fait partie de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.

Exemple 9.6. Soit $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Pour chaque $m \geq 1$, notons $d_m(x, y)$ une formule exprimant qu'il existe exactement $m - 1$ éléments strictement compris entre x et y, c'est-à-dire si x et y sont à distance m. On peut vérifier que tout type de $S_2(T)$ est de l'un des types suivants
– le type isolé par la formule $x_1 = x_2$,
– pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 < x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,
– pour chaque $m \geq 1$, le type isolé par la formule $(x_1 > x_2) \wedge d_m(x_1, x_2)$,
– le type contenant les formules $x_1 < x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$,
– le type contenant les formules $x_1 > x_2$ et $\neg d_m(x_1, x_2)$ pour tout $m \geq 1$.
Remarquons que les deux derniers types ne sont pas réalisés dans $\mathfrak{M}$.

Voici une remarque pratique permettant de construire une sous-structure élémentaire dénombrable vérifiant des propriétés voulues :

Lemme 9.7 (Témoins de Henkin)**.** *Soit $\mathcal{L}$ un langage et C un famille de nouvelles constantes. Soit $\mathfrak{M}_C$ une $(L \cup C)$-structure et $\mathfrak{M}$ sa restriction au langage $\mathcal{L}$. Supposons que pour toute formule $\phi(x)$ de $\mathcal{L} \cup C$ à une variable libre, il existe $c \in C$ tel que $\mathfrak{M}_C \models \exists x \phi(x) \to \phi(c)$ alors*

$$C^{\mathfrak{M}_C} := \{c^{\mathfrak{M}_C} : c \in C\}$$

est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Démonstration. A l'aide des formules $x = d$ où d est un symbole de constante de $\mathcal{L}$ et $y = f(\bar{c})$ où f est un symbole de fonctions, on remarque que $C^{\mathfrak{M}_C}$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$. Il suffit alors de vérifier le test de Tarski. En effet soit $\psi(x, \bar{y})$ une formule de $\mathcal{L}$ et $\bar{a}$ des paramètres dans $C^{\mathfrak{M}_C}$. On peut alors considérer la formule $\phi(x)$ de $\mathcal{L} \cup C$ correspondant à la formule $\psi(x, \bar{a})$. Par hypothèse il existe $c \in C$ tel que $\mathfrak{M}_C \models \phi(c)$. Mais alors $\mathfrak{M} \models \psi(c^{\mathfrak{M}_C}, \bar{a})$ et le test de Tarski est ainsi vérifié. $\square$

Définition 9.8. Soit T une théorie et p un type de $S(T)$. On dira qu'un modèle de T *omet* p s'il ne réalise pas p.

Théorème 9.9 (Omission des types)**.** *Soit T une théorie complète sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable et p un type de $S(T)$. Alors il existe un modèle $\mathfrak{M}$ qui omet p si et seulement si p n'est pas isolé.*

Démonstration. Considérons tout d'abord un type $p \in S_n(T)$ isolé par la formule $\phi(\bar{x})$. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T. Il existe alors une extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ et $\bar{b} \in N^n$ tel que $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(\bar{b})$. On a $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Donc il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$. Mais comme ϕ isole p, il suit que $p = tp_{\mathfrak{M}}(\bar{a})$.
Réciproquement, soit $p \in S_n(T)$ non isolé. Considérons une famille $C = \{c_i : i \in \omega\}$ de nouvelles constantes. Nous allons construire une $\mathcal{L} \cup C$-structure vérifiant la propriété

du lemme 9.7 et telle que la sous-structure élémentaire formée des points de C omet p. Pour cela choissisons une énumération $\{\phi_i(x) \colon i < \omega\}$ des formules de $\mathcal{L} \cup C$ à une variable libre et $\{\bar{a}_i \colon i < \omega\}$ une énumération des n-uples de C. Posons $\Sigma_0 = \emptyset$ et construisons par récurrence une suite croissante d'ensembles finis Σ_n d'énoncés de $\mathcal{L} \cup C$ consistant avec T de la façon suivante :

– Si $n = 2m$, prenons i minimal tel que c_i ne figure ni dans Σ_n, ni dans $\phi_m(x)$. Posons alors
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\exists x \phi_m(x) \to \phi_m(c_i)\}.$$
Commme $T \cup \Sigma_n$ est consistant et qu'il n'y a aucune occurence de c_i ni dans Σ_n, ni dans $\phi_m(x)$, il suit que $T \cup \Sigma_{n+1}$ a un modèle.
– Si $n = 2m+1$, soit $\theta(\bar{c})$ la conjonction des énoncés dans Σ_n. On considère alors l'uple $\bar{a}_m$ et on peut alors supposer que $\theta(\bar{c}) = \theta(\bar{a}_m, \bar{b})$ avec $\bar{a}_m \cap \bar{b} = \emptyset$ et $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ formule de $\mathcal{L}$. Comme $T \cup \Sigma_n$ est consistant et la formule $\exists \bar{y} \theta(\bar{x}, \bar{y})$ n'isole pas p, il existe un modèle $\mathfrak{M}$ de T et $\bar{a} \in M^n$ tels que $\mathfrak{M} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$ et $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) \neq p$. Choissisons $\psi_m(\bar{x}) \in \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) \setminus p$ et posons
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\psi_m(\bar{a}_m)\}.$$
Par ce qui précède $\Sigma_{n+1} \cup T$ est consistant.

La famille Σ_n étant construite, par compacité il existe un modèle $\mathfrak{M}_C$ de $T \cup \bigcup_n \Sigma_n$. Alors par le lemme 9.7, $C^{\mathfrak{M}_C}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$, c'est donc un modèle de T. De plus un n-uple de $C^{\mathfrak{M}_C}$ est de la forme $\bar{a}_m$, il satisfait donc une formule $\psi_m(\bar{a}_m)$ et ne peut donc réaliser p. □

Le théorème précédent est également vérifié pour des types au-dessus d'un ensemble fini ou dénombrable de paramètres ; Si A est un tel ensemble de paramètres dans un modèle $\mathfrak{M}$ de T, on applique le théorème aux types de $S(A)$.
Par ailleurs en reprenant la démonstration on peut montrer qu'il est possible d'omettre une famille dénombrable de types non isolés. On peut faire un peu mieux. Remarquons que si $p \in S_n(T)$ alors le singleton $\{p\}$ est un fermé de $S_n(T)$. De plus p est non isolé si et seulement si $\{p\}$ est d'intérieur vide. Soit pour chaque $n > 0$, une partie X_n de $S_n(T)$ qui est une réunion au plus dénombrable de fermés d'intérieur vide (c'est-à-dire une partie *maigre* de $S_n(T)$). Alors on peut montrer qu'il existe un modèle de T qui omet tous les types appartenant à $\bigcup_n X_n$.

9.2 Modèles

Définition 9.10. defn Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq B \subseteq M$, et λ un cardinal.

– B est *atomique* sur $A \subseteq M$ si $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ est isolé pour chaque uple fini $\bar{b}$ de B. Comme toujours, on supprime «sur $\emptyset$».
– B est *construit* sur A s'il existe une énumération $(a_i : i < \alpha)$ de $B \setminus A$ tel que $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ est isolé pour tout $i < \alpha$. L'énumération $(a_i : i < \alpha)$ s'appelle une *construction* de B sur A.

– $\mathfrak{M}$ est *premier* sur A si $\mathfrak{M}$ se plonge élémentairement dans tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.
– $\mathfrak{M}$ est *minimal* sur A s'il n'y a pas de sous-structure élémentaire propre de $\mathfrak{M}$ contenant A.
– $\mathfrak{M}$ est λ-*homogène* si tout isomorphisme partiel élémentaire dont le domaine est de cardinalite $< \lambda$ est contenu dans une famille karpienne, et *homogène* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-homogène.
– $\mathfrak{M}$ est *fortement* λ-*homogène* si tout isomorphisme partiel élémentaire dont le domaine est de cardinalite $< \lambda$ se prolonge en un automorphisme, et *fortement homogène* si $\mathfrak{M}$ est fortement $|\mathfrak{M}|$-homogène.
– $\mathfrak{M}$ est λ-*universel* si tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ de cardinal $\leq \lambda$ se plonge élémentairement dans $\mathfrak{M}$, et *universel* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-universel.
– $\mathfrak{M}$ est λ-*saturée* si $\mathfrak{M}$ réalise tout 1-type sur un domaine $A \subseteq M$ de cardinalité $< \lambda$, et *saturée* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-saturé.

Proposition 9.11. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $\lambda \geq |\mathcal{L}|$ un cardinal infini.*

1. *Si $B \setminus A$ est dénombrable et B est atomique sur A, alors B est construit sur A.*
2. *Si B est construit sur A, alors B est atomique sur A.*
3. *Si $\mathfrak{M}$ est construit sur A, alors $\mathfrak{M}$ est premier sur A.*
4. *Si $\mathfrak{M}$ est dénombrable, alors $\mathfrak{M}$ est atomique sur A ssi $\mathfrak{M}$ est construit sur A ssi $\mathfrak{M}$ est premier sur A.*
5. *Si $\mathfrak{M}$ est fortement λ-homogène, alors $\mathfrak{M}$ est λ-homogène.*
6. *Si $\mathfrak{M}$ est λ-saturée et $A \subseteq M$ est de cardinalité $< \lambda$, alors $\mathfrak{M}$ réalise tout λ-type sur A.*
7. *$\mathfrak{M}$ est λ-saturée ssi $\mathfrak{M}$ est λ-universel et λ-homogène.*

Démonstration. 1. Découle du Lemme 9.5.

2. Soit $(a_i : i < \alpha)$ une construction de B sur A. On montre par récurrence que $\{a_i : i < j\}$ est atomique sur A pour tout $j \leq \alpha$. C'est évident pour $j = 0$ ou j limite. Soit $j = k+1$ et $\bar{a} \in \{a_i : i \leq k\}$. On pose $\bar{a}' = \bar{a} \setminus \{a_k\}$. Alors $\mathrm{tp}(a_k/A, a_i : i < k)$ est isolé par une formule $\phi(x, \bar{a}'')$ avec $\phi \in \mathcal{L}(A)$ et $\bar{a}'' \in \{a_i : i < k\}$. Cette même formule isole $\mathrm{tp}(a_k/A, \bar{a}', \bar{a}'')$. Puisque $\mathrm{tp}(\bar{a}'\bar{a}''/A)$ est isolé par hypothèse de récurrence, $\mathrm{tp}(a_k\bar{a}'\bar{a}''/A)$ est isolé, ainsi que $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$, par le lemme 9.5.
3. Soit $(a_i : i < \alpha)$ une construction de $\mathfrak{M}$ sur A. Puisque tout type isolé est réalisé dans tout modèle $\mathfrak{N}$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, on trouve par récurrence transfinie sur j une suite $(b_i : i < \alpha)$ d'éléments de N telle que $(\mathfrak{M}, A, a_i : i \leq j) \equiv (\mathfrak{N}, A, b_i : i \leq j)$.
4. Si $\mathfrak{M}$ n'est pas atomique sur A, alors il y a $n < \omega$ et un n-type principal $p \in S_n(A)$ qui est réalisé dans $\mathfrak{M}$. Par le théorème 9.9 il y a un modèle $\mathfrak{N}$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ qui omet p, et $\mathfrak{M}$ ne peut pas se plonger élémentairement dans $\mathfrak{N}$ sur A comme la réalisation de p n'a pas d'image possible. D'autre part, si A est dénombrable, alors par le corollaire 6.38 il y a un modèle dénombrable de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, donc un modèle premier est forcément dénombrable. Le reste découle de 1.–3.

5. Suit immédiatement des définitions.
6. Soit $p(x_i : i < \lambda) \in S_\lambda(A)$, et $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ une extension élémentaire qui réalise p par une suite $(n_i : i < \lambda)$. On construit une chaîne d'isomorphismes partiels élémentaires $(\sigma_i : i < \lambda)$ de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que $\mathrm{dom}(\sigma_i) = A \cup \{n_j : j < i\}$. On prend $\sigma_0 = \mathrm{id}_A$, et des réunions aux limites. Soit $j = k + 1$. Alors
$$\sigma_k(\mathrm{tp}(n_k/A, n_i : i < k)) \in S_1(A, \sigma_k(n_i) : i < k) \ ;$$
comme $|A \cup \{\sigma_k(n_i) : i < k\}| < \lambda$, ce type est réalisé par un élément $m \in M$. On pose $\sigma_j(n_k) = m$. Alors la suite $(\sigma_{i+1}(n_i) : i < \lambda)$ réalise p dans M.
7. Exercice.

□

Remarque. Si $|A| < \lambda < |S(A)|$ pour un sous-ensemble A d'un modèle de T, alors il n'y a pas de modèle saturé de cardinal λ (un tel modèle devrait contenir une copie A' de A, et ensuite réalisations de tous les types sur A').

Proposition 9.12. *1. Deux modèles atomiques dénombrables d'une théorie complète sont isomorphes. Plus généralement, si $(\mathfrak{M}, A) \equiv (\mathfrak{N}, B)$, $M \setminus A$ et $N \setminus B$ sont dénombrables, $\mathfrak{M}$ est atomique sur A et $\mathfrak{N}$ est atomique sur B, alors tout isomorphisme élémentaire partiel $\sigma_0 : A \to B$ se prolonge en un isomorphisme.*

2. Deux modèles saturés de même cardinal λ d'une théorie complète sont isomorphies. Plus précisement, tout isomorphisme élémentaire partiel $\sigma_0 : A \to B$ de deux parties de cardinal $< \lambda$ se prolonge en un isomorphisme.

Démonstration. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de la même théorie complète, l'application vide est un isomorphisme partiel. Donc l'isomorphie des modèles est une conséquence de la possibilité de prolongement.

Dans le cas 1. on pose $\lambda = \omega$. Soient $(m_i : i < \lambda)$ et $(n_i : i < \lambda)$ des énumérations de $M \setminus A$ et de $N \setminus B$. On va construire une suite d'isomorphismes partiels $(\sigma_i : i < \lambda)$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, tels que σ_i étend σ_j pour $j > i$, et pour tout $i \geq 0$, le domaine de σ_i contient $\{m_k : k < i\}$, et l'image de σ_i contient $\{n_k : k < i\}$, avec $|\mathrm{Dom}(\sigma_i) \setminus A| = |\mathrm{Im}(\sigma_i \setminus B| \leq 2 \cdot |i|$. Alors $\sigma = \bigcup_{i<\lambda} \sigma_i$ sera l'isomorphisme entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

Supposons qu'on a trouvé σ_i, et soit A_i le domaine et B_i l'image de σ_i. Dans le cas 1. le type $\mathrm{tp}(m_i/A_i)$ est isolé par une formule $\phi(x, A_i)$ d'après le lemme 9.5 ; comme $\mathfrak{M} \models \exists x\, \phi(x, A_i)$ et σ_i est élémentaire, $\mathfrak{N} \models \exists x\, \phi(x, B_i)$; soit $n \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi(n, B_i)$. Comme σ_i est élémentaire, $\phi(x, A_i)$ isole $\mathrm{tp}(n/B_i) = \sigma_i(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$. Donc on peut étendre σ_i en envoyant m_i à n. De même, comme $\mathrm{tp}(n_i/B_i, n)$ est isolé par une formule $\psi(x, B_i, n)$, on trouve $m \in M$ réalisant $\psi(x, A_i, m_i)$.

Dans le cas 2. le type $\sigma_i(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$ est réalisé dans $\mathfrak{N}$ par un élément n par saturation de $\mathfrak{N}$, si $\sigma' = \sigma \cup \{m_i \mapsto n\}$, le type $\sigma'^{-1}(\mathrm{tp}(n_i/B_i, n))$ est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un élément m par saturation de $\mathfrak{M}$. Ceci ajoute au plus deux éléments au domaine et à l'image, ce qui conserve la condition sur leur cardinalité. On pose
$$\sigma_{i+1} : x \mapsto \begin{cases} \sigma_i(x) & \text{si } x \in A_i \\ n & \text{si } x = m_i \\ n_i & \text{si } x = m. \end{cases}$$

Si on a obtenu une suite $(\sigma_j : j < i)$ d'isomorphismes partiels pour un ordinal limite i, alors $\sigma_i = \bigcup_{j<i} \sigma_j$ est aussi un isomorphisme partiel ; avec

$$|\mathrm{Dom}(\sigma_{i+1}) \setminus A| = |\mathrm{Im}(\sigma_{i+1} \setminus B| \leq |i| \cdot 2 \cdot |i| = 2 \cdot |i|$$

pour i infini. □

Exemple 9.13. 1. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sont atomiques, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ est saturé, mais $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ n'est pas saturé : il omet le 2-type qui dit que la distance entre x et y est infini.

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est atomique ; sa théorie n'a pas de modèle saturé de cardinal ω : pour tout ensemble P de nombres premiers il y a le type qui dit que x est divisible par p si et seulement si $p \in P$; ça fait 2^ω types sur $\emptyset$ qu'on ne peut pas tous réaliser dans un modèle dénombrable.

3. $\tilde{\mathbb{Q}}$ et $\tilde{\mathbb{F}}_p$ sont les corps algébriquement clos atomiques. $\mathbb{C}$ est saturé (de cardinal 2^ω), et $\mathbb{Q}(\widetilde{x_i : i} < \omega)$ est saturé dénombrable.

Exemple 9.14. Voici une théorie qui n'a pas de modèle atomique : Le langage comporte un ordre $<$ et un prédicat unaire P ; on considère la théorie de $\mathbb{R}$, ou on a ajoute une constante pour chaque rationel $q \in \mathbb{Q}$, et P est interpreté par $\mathbb{Q}$. Alors tout modèle contiendra une copie de $\mathbb{Q}$; on peut construire un modèle $\mathfrak{M}$ de façon que pour une certaine coupure irrationnel sur $\mathbb{Q}$ toute réalisation satisfait P. Mais s'il y a un modèle atomique $\mathfrak{M}_0$, il s'injecte dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathfrak{M}$, et toutes les réalisations de cette coupure dans $\mathfrak{M}_0$ satisfont à la fois $\neg P$ et P. Donc il n'y en a pas ; comme on peut repeter avec chaque coupure irrationnel, aucune telle coupure est réalise dans $\mathfrak{M}_0$. Mais $\mathfrak{M}_0$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ et ne réalise que des coupures irrationnelles. Ça signifie que la domaine de $\mathfrak{M}_0$ est $\mathbb{Q}$, et $\mathfrak{M}_0$ ne comporte aucun élément réalisant $\neg P$, contradiction.

Exemple 9.15. $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, 0, +)$ n'a pas de modèle premier. En fait, pour p premier on pose

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n > 0, p \nmid n\}.$$

On montre (par élimination des quanteurs dans un langage avec un predicat pour divisibilité par p, pour tout nombre premier p) que $\bigoplus_p \mathbb{Z}_{(p)}$ est un modèle de $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ dans lequel $\mathbb{Z}$ ne se plonge pas. Puisque $\mathbb{Z}$ est minimal, il n'y a pas de modèle premier.

Proposition 9.16. *Toute structure a une extension élémentaire ω-saturée.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}$ une structure. On construit une chaîne

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathfrak{M}_i \preccurlyeq \ldots$$

telle que pour tout i, $\mathfrak{M}_{i+1}$ réalise tous les types dans $S_1(M_i)$. Pour cela considérons une énumération $(p_j)_{j \in J}$ des types dans $S_1(M_i)$ et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \bigcup_{j \in J} p_j(c_j)$$

où $(c_j)_{j\in J}$ est une famille de nouvelles constantes. Par compacité Σ est consistant car toute partie finie de chaque p_j est réalisée dans $\langle \mathfrak{M}_i, M_i\rangle$.
Alors l'union $\mathfrak{N} := \bigcup \mathfrak{M}_i$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$, ω-saturée. En effet si A est une partie finie de N, il existe i tel que $A \subseteq M_i$. Soit p un type dans $S_1(A)$. Il a une réalisation a dans un extension élémentaire de $\mathfrak{M}_i$. Alors le type de a sur $\mathfrak{M}_i$ est réalisé dans $\mathfrak{M}_{i+1}$, donc p est réalisé dans $\mathfrak{N}$. □

Exercice 9.17. Pour tout $\mathfrak{M}$ et tout λ il y a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ qui est λ-saturée.

Exercice 9.18. Si $|\mathcal{L}| \leq \lambda$ et $\lambda^+ = 2^\lambda$, une théorie complète a un modèle saturé de cardinal λ^+.

Théorème 9.19. Ryll-Nardzewski, Svenonius, Engeler *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une théorie complète dénombrable :*

1. *T est $\aleph_0$-catégorique.*
2. *Pour chaque $n < \omega$ il n'y a qu'un nombre fini de formules inéquivalentes modulo T à n variables libres $x_1, \ldots, x_n$.*
3. *$S_n(T)$ est fini pour chaque $n < \omega$.*

Démonstration. Si $S_n(T)$ est fini, on trouve facilement des formules isolant les types dans $S_n(T)$; une formule en n variables libres sera donc équivalente à une combinaison booléenne de ces formules. L'équivalence 2. ⇔ 3. en découle.
Si $S_n(T)$ est fini pour chaque n, alors chaque type sur $\emptyset$ est isolé et tout modèle de T est atomique ; par le théorème 9.12 deux modèles dénombrables sont isomorphes.
Réciproquement, si T est ω-catégorique, comme tout type non-isolé sur $\emptyset$ peut être ou bien réalisé ou bien omis dans un modèle dénombrable par le théorème d'omission des types, tout type sur $\emptyset$ est principal. Pour $n < \omega$ soient $\{\phi_i(\bar{x}) : i \in I\}$ toutes les formules qui isolent un n-type. Si I est infini, alors par compactité l'ensemble $\{\neg\phi_i(\bar{x}) : i \in I\}$ est consistant et on peut le completer en un type $p(\bar{x})$. Mais p est principal, et la formule isolant $p(\bar{x})$ doit figurer parmi les formules $\phi_i(\bar{x})$, ce qui contredit que p contient $\neg\phi_i(\bar{x})$ pour tout i. □

Exercice 9.20. Montrer qu'une théorie dénombrable complète est $\aleph_0$-catégorique si et seulement si tout modèle dénombrable est ω-saturé.

Index

Bibliographie

[Ho] W. Hodges. *A shorter Model Theory.* Cambridge, 1997.

[Po] B. Poizat. *Un cours de théorie des modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985. Traduction anglaise : *A course in Model Theory.* Springer Verlag, Heidelberg, 2000.

[1] TZ12 K. Tent et M. Ziegler. A course in Model Theory. Lecture Notes in Logic 40, ASL, Cambridge, 2012.