Compacité
25 mars 2013

Exercice I On considère le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est un symbole de relation binaire.

1. Ecrire les énoncés qui disent que R est une relation d'équivalence qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a exactement une classe contenant n éléments.

2. Expliciter un modèle des énoncés du premier point.

Nous noterons T la théorie formée par les conséquences des énoncés du premier point.

3. Expliciter deux modèles dénombrables et isomorphes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais qu'elle ne la soit pas élémentairement.

4. Expliciter un modèle dénombrable de T qui a exactement une classe infinie d'équivalence. Expliciter un modèle dénombrable de T qui a une infinité de classes infinies.

5. Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire avec une infinité de classes d'équivalences infinies.

6. Montrer que T est une théorie complète.

Exercice II On considère le langage $\mathcal{L} = \{., \ ^{-1}, 1\}$ des groupes.

1. Montrer qu'un groupe $\mathcal{G}$ est simple si et seulement si pour tout $g \in G^\times$ et $h \in G$, il existe $n(g,h) \in \mathbb{N}^*$ tel que,
$$(\mathcal{G}, g, h) \models g \neq 1 \rightarrow \exists z_1 \dots z_{n(g,h)} (h = (g^{\pm 1})^{z_1} \dots (g^{\pm 1})^{z_{n(g,h)}}).$$
2. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un groupe simple et que $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$, alors il en est de même pour $\mathcal{H}$.
3. Montrer que toutes les extension élémentaires d'un groupe simple sont simples si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\mathcal{G} \models \forall xy (x \neq 1 \rightarrow \exists z_1 \dots z_n \bigvee_{i=1}^{n} (y = (x^{\pm 1})^{z_1} \dots (x^{\pm 1})^{z_i})).$$
4. Montrer que $\mathrm{Alt}(\mathbb{N})$ a une extension élémentaire qui n'est pas simple. (*Indication : Vous pouvez considérer les produits des conjugués de* (1 2)(3 4) *de longueur arbitrairement large et appliquer la compacité.*)