Exercice 1 (Représenter l'exponentiation des ordinaux).
Cet exercice a pour objectif de donner une représentation "concrète" de l'exponentiation des ordinaux. Soient donc α et β deux ordinaux. On s'intéresse aux fonctions de β vers α "de support fini". Pour une telle fonction f, on définit $\mathrm{supp}(f) = \{ \xi < \beta \mid f(\xi) \neq 0 \}$. On définit ensuite le sous-ensemble suivante des fonctions de β vers α :

$$S(\beta, \alpha) = \{ f \mid f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ et } \mathrm{supp}(f) \text{ est fini.} \} .$$

Voici un exemple pour fixer les idées : la fonction $f : \omega + 1 \longrightarrow \omega + 1$ qui associe 1 à ω, et dont la restriction à ω est 0.
Maintenant on définit une relation d'ordre sur $S(\beta, \alpha)$: pour toutes $f, g \in S(\beta, \alpha)$, $f \prec g$ si et seulement si il existe $\xi_0 < \beta$ tel que $f(\xi_0) < g(\xi_0)$, et que pour tout $\xi > \xi_0$, $f(\xi) = g(\xi)$.

1. Vérifier que pour tous ordinaux α et β, $\prec$ définit une relation de bon ordre total sur $S(\beta, \alpha)$. Quel est son minimum ?
2. Expliciter un isomorphisme entre $(S(i, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^i, <)$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. (*Vous pouvez utiliser la représentation du produit de deux ordinaux comme le produit cartésien muni de l'ordre anti-lexicographique.*)
3. Déterminer un isomorphisme entre $(S(\beta, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^\beta, <)$ quand β est successeur.
4. Déterminer un isomorphisme entre $(S(\beta, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^\beta, <)$ quand β est limite. (*Entre ξ_0 comme défini ci-dessus et β, il existe un segment final infini de β.*)

Exercice 2 (Equivalents de l'Axiome du Choix).
On dira qu'une famille d'ensembles $\mathcal{F}$ est de caractère fini si pour tout ensemble E on a que $E \in \mathcal{F}$ si et seulement si toute partie finie de E appartient à $\mathcal{F}$.
Démontrer que chacun des deux énoncés suivants est équivalent à l'Axiome du Choix.

1. Si $\mathcal{F}$ est une famille qui satisfait la condition suivante :

   Si $\mathcal{F}_0$ est une sous-famille totalement ordonnée par l'inclusion (en d'autres termes par $\subseteq$), alors $\bigcup \mathcal{F}_0$ appartient à $\mathcal{F}$ aussi.

   Alors $\mathcal{F}$ contient un ensemble maximal par rapport à l'inclusion.
2. Toute famille $\mathcal{F}$ d'ensembles de caractère fini possède un élément maximal.

Exercice 3 (Ordres denses linéaires).
Soit $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^\omega$, les suites d'entiers relatifs.

1. Montrer que $\prec$ définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^\omega$.

Dans ce qui suit, on restreint $\prec$ à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites d'entiers relatifs éventuellement constantes (donc les suites f tel qu'il existe $N < \omega$ avec $f(n) = f(N)$ pour tout $n \geq N$).

2. Montrer que $\mathcal{S}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre dense sur $\mathcal{S}$.
4. Montrer que $\prec$ n'a pas de plus grand ni de plus petit élément.

Exercice 4 (Cofinalité).
Soit α un ordinal. On rappelle qu'un sous-ensemble $X \subseteq \alpha$ est *cofinal* dans α si $\bigcup X = \alpha$.

1. Montrer que si $X \subseteq \alpha$ est cofinal dans α, alors il y a un sous-ensemble cofinal $Y \subseteq \alpha$ ordre-isomorphe à $\mathrm{cf}(\alpha)$ avec $Y \subseteq X$.
2. Montrer que si α et β sont deux ordinaux avec des sous-ensembles cofinaux ordre-isomorphes, alors $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.
3. Montrer que si α est un ordinal limite, alors $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.