Exercice 1 (Représenter l'exponentiation des ordinaux).
Cet exercice a pour objectif de donner une représentation "concrète" de l'exponentiation des ordinaux. Soient donc α et β deux ordinaux. On s'intéresse aux fonctions de β vers α "de support fini". Pour une telle fonction f, on définit $\mathrm{supp}(f) = \{ \xi < \beta \mid f(\xi) \neq 0 \}$. On définit ensuite le sous-ensemble suivante des fonctions de β vers α :

$$S(\beta, \alpha) = \{ f \mid f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ et } \mathrm{supp}(f) \text{ est fini.} \} .$$

Voici un exemple pour fixer les idées : la fonction $f : \omega + 1 \longrightarrow \omega + 1$ qui associe 1 à ω, et dont la restriction à ω est 0.
Maintenant on définit une relation d'ordre sur $S(\beta, \alpha)$: pour toutes $f, g \in S(\beta, \alpha)$, $f \prec g$ si et seulement si il existe $\xi_0 < \beta$ tel que $f(\xi_0) < g(\xi_0)$, et que pour tout $\xi > \xi_0$, $f(\xi) = g(\xi)$.

1. Vérifier que pour tous ordinaux α et β, $\prec$ définit une relation de bon ordre total sur $S(\beta, \alpha)$. Quel est son minimum ?
2. Expliciter un isomorphisme entre $(S(i, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^i, <)$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. (*Vous pouvez utiliser la représentation du produit de deux ordinaux comme le produit cartésien muni de l'ordre anti-lexicographique.*)
3. Déterminer un isomorphisme entre $(S(\beta, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^\beta, <)$ quand β est successeur.
4. Déterminer un isomorphisme entre $(S(\beta, \alpha), \prec)$ et $(\alpha^\beta, <)$ quand β est limite. (*Entre ξ_0 comme défini ci-dessus et β, il existe un segment final infini de β.*)

Solution.

1. La relation $\prec$ est clairement anti-reflexive ; soit $f \prec g$, témoigné par $\xi_0 < \beta$, et $g \prec h$, témoigné par $\xi_1 < \beta$. Soit $\xi_2 = \max\{\xi_0, \xi_1\}$. Alors
$$f(\xi_2) \leq g(\xi_2) \leq h(\xi_2),$$
et au moins une des inégalités est stricte. Si $\xi > \xi_2$, alors $f(\xi) = g(\xi) = h(\xi)$, d'où $f \prec h$. Ainsi $\prec$ est une relation d'ordre partielle.
Si $f, g \in S(\alpha, \beta)$ avec $f \neq g$, soit $\xi_0 < \beta$ minimal avec $f(\xi_0) \neq g(\xi_0)$. Alors soit $f(\xi_0) < g(\xi_0)$ et $f \prec g$, soit $g(\xi_0) < f(\xi_0)$ et $g \prec f$. Donc $\prec$ est total.
Enfin, supposons que $(f_i : i \in \omega)$ soit une chaîne infinie descendante. Le support de chaque f_i est fini ; soit ξ_i son élément maximal tel qu'il existe $j > i$ avec $f_j(\xi_i) < f_i(\xi_i)$. Un tel ξ_i doit exister puisque $f_j \prec f_i$ pour tout $j > i$. Alors $f_j(\xi) = f_i(\xi)$ pour tout $\xi > \xi_i$. Soit $j > i$ minimal tel que $f_j(\xi_i)$ est minimal possible. Alors $\xi_j < \xi_i$; en itérant on obtient une chaîne strictement descendante d'ordinaux, une contradiction. Ainsi $\prec$ est un bon-ordre total. Son minimum est la fonction constante $\beta \to \{0\}$.
2. $i = 0$: La seule fonction $\emptyset \to \alpha$ (de support fini) est $\emptyset$. On a donc
$$S(0, \alpha) = \{\emptyset\} = 1 = \alpha^0.$$
$i = n > 0$: Une fonction $f \in S(n, \alpha)$ est donné par $(f(0), \ldots, f(n-1)) \in \alpha^n$, et $f \prec g$ ssi $(f(0), \ldots, f(n-1)) <_{al} (g(0), \ldots, g(n-1))$, où $<_{al}$ est l'ordre anti-lexicographique. Donc l'isomorphisme recherché est
$$S(n, \alpha) \ni f \mapsto (f(0), \ldots, f(n-1)) \in \alpha^n.$$
3. Soit $\beta = \gamma + 1$, et $\iota_\gamma : S(\gamma, \alpha) \to \alpha^\gamma$ un isomorphisme. On considère
$$\iota_\beta : S(\beta, \alpha) \ni f \mapsto (\iota_\gamma(f \restriction_\gamma), f(\gamma)) \in \alpha^\gamma \times \alpha,$$
avec l'ordre anti-lexicographique sur le produit cartésien. Alors ι_β respecte l'ordre, et $\alpha^\gamma \times \alpha = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\beta$.

4. Pour $\beta' \leq \beta$ on considère
$$S(\beta,\alpha)_{\beta'} = \{f \in S(\beta,\alpha) : \mathrm{supp}(f) \subseteq \beta'\}$$
avec l'ordre induite. Alors $S(\beta,\alpha)_{\beta''}$ est un segment initial de $S(\beta,\alpha)_{\beta'}$ pour $\beta'' \leq \beta' \leq \beta$, et la restriction à β' donne un isomorphisme de $S(\beta,\alpha)_{\beta'}$ vers $S(\beta',\alpha)$. Si β est limite, $S(\beta,\alpha) = \bigcup_{\beta'<\beta} S(\beta,\alpha)_{\beta'}$ puisque les fonctions sont de support fini ; si $\iota_{\beta'} : S(\beta',\alpha) \to \alpha^{\beta'}$ est un isomorphisme pour tout $\beta' < \beta$, alors
$$\iota_\beta = \bigcup_{\beta'<\beta} (\iota_{\beta'} \circ \restriction_{\beta'}) : S(\beta,\alpha) = \bigcup_{\beta'<\beta} S(\beta,\alpha)_{\beta'} \to \bigcup_{\beta'<\beta} \alpha^{\beta'} = \alpha^\beta$$
est l'isomorphisme recherché.

Exercice 2 (Equivalents de l'Axiome du Choix).
On dira qu'une famille d'ensembles $\mathcal{F}$ est de caractère fini si pour tout ensemble E on a que $E \in \mathcal{F}$ si et seulement si toute partie finie de E appartient à $\mathcal{F}$.
Démontrer que chacun des deux énoncés suivants est équivalent à l'Axiome du Choix.

1. Si $\mathcal{F}$ est une famille qui satisfait la condition suivante :

   > Si $\mathcal{F}_0$ est une sous-famille totalement ordonnée par l'inclusion (en d'autres termes par $\subseteq$), alors $\bigcup \mathcal{F}_0$ appartient à $\mathcal{F}$ aussi.

   Alors $\mathcal{F}$ contient un ensemble maximal par rapport à l'inclusion.
2. Toute famille $\mathcal{F}$ d'ensembles de caractère fini possède un élément maximal.

Solution. On montrera l'équivalence avec le principe de Zorn, dont on sait qu'il est équivalent a l'axiome du choix.

Zorn $\Rightarrow$ 1. : Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles de caractère fini. Alors chaque chaîne $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ possède une majorante $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. D'après le principe de Zorn, $\mathcal{F}$ a un élément maximal pour l'inclusion.

1. $\Rightarrow$ 2. : Soit $\mathcal{F}$ une famille de caractère fini. Alors si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ est une chaîne, toute partie finie de $\bigcup \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{F}$, et donc $\bigcup \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{F}$. D'après l'hypothèse 1. il y a un élément maximal dans $\mathcal{F}$.

2. $\Rightarrow$ Zorn : Soit $(S,\leq)$ un ensemble inductif, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des chaînes de S, c'est-à-dire l'ensemble des parties de S totalement ordonnées. Soit E un ensemble tel que toutes les parties finies de E appartiennent à $\mathcal{F}$. Si $e, e' \in E$, alors $\{e, e'\}$ est une chaîne dans S. Donc $\leq$ est total sur $E \subseteq S$, et $E \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est de caractère fini ; d'après l'hypothèse 2. il y a un élément maximal E_0. Soit $s \in S$ un majorant pour E_0. Alors $E_1 = E_0 \cup \{s\}$ est une chaîne, donc $E_1 \in \mathcal{F}$, et $E_1 = E_0$ par maximalité. Ainsi $s \in E_0$ est un maximum d'E_0 ; si $s' \in S$ avec $s' \geq s$, alors s' majore E_0, et est lui aussi l'unique maximum d'E_0 : on a bien que $s = s'$ est un élément maximal de S.

Exercice 3 (Ordres denses linéaires).
Soit $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^\omega$, les suites d'entiers relatifs.

1. Montrer que $\prec$ définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^\omega$.

Dans ce qui suit, on restreint $\prec$ à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites d'entiers relatifs éventuellement constantes (donc les suites f tel qu'il existe $N < \omega$ avec $f(n) = f(N)$ pour tout $n \geq N$).

2. Montrer que $\mathcal{S}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre dense sur $\mathcal{S}$.
4. Montrer que $\prec$ n'a pas de plus grand ni de plus petit élément.

Solution.

1. On a $f \prec g$ s'il y a $n \in \omega$ avec $f(n) < g(n)$, et $f(i) = g(i)$ pour tout $i < n$. Donc $\prec$ est anti-reflexive ; si $f \prec g \prec h$, témoigné par n' et n'', soit $n = \min\{n', n'''\}$. Alors $f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ et au moins une des inégalités est stricte, et pour $i < n$ on a $f(i) = g(i) = h(i)$. Donc $f \prec h$ et $\prec$ est transitive. Enfin, si $f \neq g$, soit $n \in \omega$ minimal avec $f(n) \neq g(n)$. Si $f(n) < g(n)$ alors $f \prec g$; si $g(n) < f(n)$ alors $g \prec f$. Donc f est un ordre total sur $\mathbb{Z}^\omega$.
2. Pour $n < \omega$ et $z \in \mathbb{Z}$ soit
$$\mathcal{S}(n, z) = \{f \in \mathbb{Z}^\omega : f(i) = z \text{ pour } i \geq n\}.$$
Alors la restriction à n donne une bijection entre $\mathcal{S}(n, z)$ et $\mathbb{Z}^n$. Donc $\mathcal{S}(n, z)$ est dénombrable, ainsi que
$$\mathcal{S} = \bigcup_{n<\omega,\, z\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}(n, z).$$
3. Soient $f, g \in \mathcal{S}$ avec $f \prec g$, et n tel que $f(n) < g(n)$ et $f(i) = g(i)$ pour $i < n$. On pose $h : \omega \to \mathbb{Z}$ avec
$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \leq n, \\ f(n+1) + 1 & \text{si } i = n+1, \\ 0 & \text{si } i > n+1. \end{cases}$$
Alors $h \in \mathcal{S}$ et $f \prec h \prec g$. Donc $\prec$ est dense sur $\mathcal{S}$
4. Si $f \in \mathcal{S}$, alors f^+ et f^- donnés par $f^+(i) = f(i) + 1$ et $f^-(i) = f(i) - 1$ sont dans $\mathcal{S}$, et $f^- \prec f \prec f^+$. Donc $\mathcal{S}$ n'a ni de plus petit ne de plus grand élément.

Exercice 4 (Cofinalité).
Soit α un ordinal. On rappelle qu'un sous-ensemble $X \subseteq \alpha$ est *cofinal* dans α si $\bigcup X = \alpha$.

1. Montrer que si $X \subseteq \alpha$ est cofinal dans α, alors il y a un sous-ensemble cofinal $Y \subseteq \alpha$ ordre-isomorphe à $\mathrm{cf}(\alpha)$ avec $Y \subseteq X$.
2. Montrer que si α et β sont deux ordinaux avec des sous-ensembles cofinaux ordre-isomorphes, alors $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.
3. Montrer que si α est un ordinal limite, alors $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Solution.

1. Soit $A \subseteq \alpha$ avec $|A| = \mathrm{cf}(\alpha)$ et $\bigcup A = \alpha$. Soit $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to A$ une bijection, et pour $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ soit
$$g(\beta) = \min(X \setminus \{f(\beta'), g(\beta') : \beta' \leq \beta\}).$$
Comme X est cofinal dans α et $|\{f(\beta'), g(\beta') : \beta' \leq \beta\}| < \mathrm{cf}(\alpha)$, un tel $g(\beta)$ existe. Soit $Y = \{g(\beta) : \beta < \mathrm{cf}(\alpha)\}$. Alors pour tout $\gamma < \alpha$ il y a $\beta \in A$ avec $\gamma \leq \beta \leq g(f^{-1}(\beta)) \in Y$, donc Y est cofinal dans α. Or, $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to Y$ est un isomorphisme qui préserve l'ordre.
2. Soient $A \subseteq \alpha$ et $B \subseteq \beta$ cofinaux et ordre-isomorphes via une bijection f. Soit $X \subseteq A$ cofinal et ordre-isomorphe à $\mathrm{cf}(\alpha)$. Alors $f(X)$ est cofinal dans B, et donc dans β. Ainsi $\mathrm{cf}(\alpha) = |X| = |f(X)| \geq \mathrm{cf}(\beta)$; par symétrie $\mathrm{cf}(\beta) \geq \mathrm{cf}(\alpha)$ et on a égalité.
3. Soit $A = \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$. Alors $\beta \mapsto \aleph_\beta$ est un ordre-isomorphisme entre α et A ; comme A est cofinal dans $\aleph_\alpha$ et α est cofinal dans α, la partie 2. donne $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.