Université Lyon 1
M1G. Théorie de Galois.

Le 29 mars 2017

PARTIEL

Durée : 1h30

Documents non admis.
Les résultats d'une question peuvent être utilisés pour les questions suivantes.

Problème 1

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.
2. On suppose que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Déterminer le groupe de Galois G de $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ sur $\mathbb{Q}$.
3. Donner ses éléments explicitement.
4. Déterminer tous les sous-groupes de G.
5. Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.
6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.
7. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Problème 2

Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré p où p est premier, et G son groupe de Galois.

1. Montrer que p divise l'ordre de G.
2. Montrer que G contient un élément d'ordre p.
3. On considère G comme un sous-groupe du groupe symétrique S_p. Montrer que G contient une permutation cyclique d'ordre p.
4. On suppose que $P(X)$ a exactement $p-2$ racines réelles. Montrer que G contient une transposition.

On admet le résultat suivant (assez simple) : Si un sous-groupe G de S_p contient un cycle d'ordre p et une transposition, alors $G = S_p$.

5. Soit $P(X) = X^5 - 10X + 2$. Montrer que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
6. Montrer que le groupe de Galois de P est S_5. (*Indication: étudier les extréma locaux de $P(X)$.*)

Problème 3

Soit $\bar{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et soit $a \in \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer qu'il existe un sous-corps $K \leq \bar{\mathbb{Q}}$ tel que $a \notin K$ et que tout sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ contenant strictement K contient a ; on dit que K est un sous-corps de $\mathbb{Q}$ maximal sans a. (*Indication : utiliser le lemme de Zorn.*)

On choisit un nombre premier p divisant $[K(a) : K]$. Soit $K \leq L \leq \bar{\mathbb{Q}}$ une extension finie non triviale de K. On note M la clôture normale de L dans $\bar{\mathbb{Q}}$ et $G := \mathrm{Gal}(M/K)$.

2. Montrer que p divise $[L : K]$.
3. Montrer que $[L : K]$ est une puissance de p. (*Indication : appliquer la théorie de Galois à l'extension $K \leq M$.*)
4. Montrer que $[K(a) : K] = p$ et que $K(a)$ est la seule sous-extension de $K \leq \bar{\mathbb{Q}}$ de degré p sur K.

Pour les parties 3. et 4. on pourra utiliser le théorème suivant (admis sans démonstration) :

Théorème de Sylow. Soit p un nombre premier et soit G un groupe fini de cardinal mp^r, où p ne divise pas m. Alors il existe un sous-groupe de G de cardinal p^r. Plus précisément, pour tout sous-groupe H de G de cardinal p^s, avec $0 \leq s \leq r$, et tout $s \leq t \leq r$, il existe un sous-groupe de G contenant H et de cardinal p^t.