

Université de Lyon - CNRS
École normale supérieure de Lyon
Unité de mathématiques pures et appliquées
Numéro d'ordre : 002

Invariants entiers en géométrie énumérative réelle

Jean-Yves WELSCHINGER

Habilitation à diriger des recherches

Synthèse présentée le

17 mars 2008

devant le jury composé de

M. Viatcheslav KHARLAMOV

M. François LALONDE

M. Dietmar SALAMON

M. Jean-Claude SIKORAV

M. Claude VITERBO

Mme. Claire VOISIN

après avis de

M. Yakov ELIASHBERG

M. François LALONDE

M. Claude VITERBO

Invariants entiers en géométrie énumérative réelle

Mars 2008

Jean-Yves WELSCHINGER
Unité de mathématiques pures et appliquées
École normale Supérieure de Lyon
UMR CNRS 5669
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 – France

Table des matières

1	Introduction	3
2	Invariants énumératifs des variétés symplectiques réelles de dimension quatre	5
2.1	Définition des invariants	5
2.2	Bornes inférieures et optimalité	8
2.3	Congruences	10
2.4	Calculs	12
2.4.1	Dans le plan projectif complexe	12
2.4.2	Dans l'ellipsoïde de dimension deux	14
3	Invariants relatifs des variétés symplectiques réelles de dimension quatre	17
3.1	Invariants relatifs réels	17
3.1.1	Définition des invariants	17
3.1.2	Sur les 3264 coniques tangentes à cinq coniques génériques	20
3.2	Invariants relatifs imaginaires	21
4	Invariants en dimension six	24
4.1	Définition des invariants dans les variétés algébriques réelles convexes	24
4.2	Extension aux variétés symplectiques réelles positives	27
4.3	Optimalité, congruences et calculs dans le cas de l'ellipsoïde de dimension trois	28
5	Sur la présence et l'absence de membranes J-holomorphes	32
5.1	Absence de membranes J -holomorphes	32
5.1.1	En dimension supérieure	32
5.1.2	En dimension quatre	34
5.2	Présence de membranes J -holomorphes	36
5.2.1	Involutions antibirationnelles des variétés symplectiques de dimension quatre	37
5.2.2	Invariants énumératifs des involutions antibirationnelles simples	38
5.2.3	Exemple : les tores isotopes au tore de Clifford	39
Appendice A Classes effectives et tores lagrangiens dans les variétés symplectiques de dimension quatre		40
Appendice B Classes de déformation des variétés algébriques réelles réglées		42
Appendice C Questions et tour d'horizon		44
C.1	Quelques questions qui ressortent de ces travaux	44
C.2	Tour d'horizon de travaux ayant un rapport avec ce mémoire	45
Appendice D Liste des travaux		46
Bibliographie		46

1 Introduction

Le nombre de racines complexes d'un polynôme générique à une variable de degré d ne dépend pas du choix du polynôme et vaut d , tandis que lorsque ce polynôme est à coefficients réels, le nombre de ses racines réelles peut prendre toutes les valeurs de même parité que d - comprises entre 0 et d . Ceci tient au fait que le corps des nombres complexes est algébriquement clos au contraire du corps des nombres réels. Bien plus généralement, le nombre de solutions d'un « système de n équations génériques » sur une variété projective complexe lisse de dimension n ne dépend que du degré de ces équations, alors qu'il dépend fortement du choix, même générique, de ces équations lorsqu'elles sont à coefficients réels et considérées sur le lieu réel d'une variété algébrique réelle. (En fait d'équations, il conviendrait plutôt de parler de sections génériques de n fibrés en droites holomorphes disons très amples). Chaque problème de géométrie énumérative réelle peut en principe s'interpréter de cette manière. La variété projective réelle est l'espace des modules des objets géométriques que l'on veut compter et les équations proviennent des conditions d'incidences que l'on impose à ces objets.

Le principal phénomène présenté dans ce mémoire est le suivant : il est parfois possible de compter ces objets géométriques réels en fonction d'un signe \pm de manière à extraire un entier indépendant du choix générique des conditions d'incidence. Dans le premier paragraphe de ce mémoire, nous observons ce phénomène en comptant le nombre de courbes J -holomorphes rationnelles réelles dans une variété symplectique réelle de dimension quatre en fixant leur classe d'homologie et leur imposant de passer par un nombre adéquat de points réels ou bien complexes conjugués. Nous utilisons en effet le langage de la géométrie symplectique pour étudier ces problèmes énumératifs, tenant compte des résultats de M. Gromov [14] selon lesquels le caractère algébrique des variétés ne joue aucun rôle dans ces problèmes énumératifs, seule l'ellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann sous-jacent intervient. Les entiers que l'on extrait de ce problème énumératif fournissent un invariant par déformation des variétés symplectiques réelles de dimension quatre (X, ω, c_X) , qui prend la forme d'une fonction $\chi : d \in H_2(X; \mathbb{Z}) \mapsto \chi^d[T] \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$ où N désigne le nombre de composantes connexes du lieu réel $\mathbb{R}X$ de la variété. On définit des invariants analogues pour les variétés symplectiques « fortement semipositives », disons positives pour simplifier, dans le troisième paragraphe de ce mémoire et en incluant des conditions de tangence à une courbe réelle dans le deuxième. Ces derniers résultats s'appliquent en particulier à un problème classique de géométrie énumérative, le comptage du nombre de coniques tangentes à cinq coniques génériques données. Le nombre de solutions complexes vaut 3264, un résultat établi par de Jonquières au milieu du dix-neuvième siècle. On montre que le nombre de solutions réelles se trouve minoré par trente-deux lorsque les coniques réelles bordent cinq disques disjoints par exemple. En effet, la valeur absolue des invariants entiers que l'on introduit dans ce mémoire borne inférieurement le nombre de solutions réelles du problème énumératif que l'on considère.

Un deuxième phénomène apparaît dans ce mémoire, l'optimalité de ces bornes inférieures. On montre en effet dans le premier paragraphe de ce mémoire que dans le cas des variétés symplectiques réelles de dimension quatre, lorsque le lieu réel possède une sphère, un tore ou bien, sous des conditions plus restrictives, un plan projectif réel et lorsqu'au plus un point est choisi réel et dans cette composante, il existe une structure presque complexe générique J pour laquelle le nombre de courbes J -holomorphes rationnelles réelles satisfaisant nos conditions d'incidence vaut exactement la valeur absolue de notre invariant, ceci quelle que soit la classe d'homologie de ces courbes rationnelles. Ce résultat vaut également pour la quadrique

ellipsoïde de dimension trois, comme établi dans le troisième paragraphe. Cette optimalité est établie à l'aide de méthodes issues de la théorie symplectique des champs, méthodes qui nous permettent également parfois de calculer le signe de notre invariant, d'établir des congruences satisfaites par ce dernier ainsi que de fournir des formules le calculant dans certains cas, calculs que l'on mène explicitement en bas degrés. Tous ces résultats font l'objet du premier paragraphe de notre mémoire. En utilisant la notion d'involution antibirationnelle sur une variété symplectique de dimension quatre, on montre de la même manière dans la quatrième paragraphe de ce mémoire l'existence de disques J -holomorphes à bords dans le tore de Clifford et satisfaisant des conditions d'incidences ponctuelles. Dans le cas d'une sphère lagrangienne dans une variété symplectique négative ou nulle, on montre au contraire dans ce même paragraphe, pour tout $E > 0$, l'existence de structures presque-complexes J pour lesquelles aucun disque ou membrane J -holomorphe d'énergie inférieure à E ne repose sur cette sphère, un résultat analogue à nos résultats d'optimalités puisqu'on atteint ainsi le minimum possible du nombre de disques ou membranes J -holomorphes. Remarquons à propos que l'obtention d'invariants entiers ou rationnels à partir du comptage du nombre de disques J -holomorphes à bords dans une sous-variété lagrangienne est un problème classique de géométrie symplectique (et de la théorie des cordes ouvertes en physique théorique) pour lequel peu de solutions existent. Notre approche en fournit une lorsque la lagrangienne est fixée par une involution antiholomorphe. Remarquons également que l'absence de disques J -holomorphes pour certaines structures permet de définir l'homologie de Floer pour des sphères lagrangiennes dans les variétés symplectiques à première classe de Chern nulle, un autre problème classique de géométrie symplectique (et de symétrie miroir en physique théorique) qui fait l'objet d'un travail en cours.

Nous présentons en appendice de ce mémoire les résultats que l'on a pu obtenir à la suite de notre thèse, mais qui sont moins directement liés au thème principal de ce mémoire. Il s'agit de la classification des classes de déformation de structures réelles sur les variétés algébriques réelles réglées en appendice B. En appendice A, on montre à l'aide de méthodes de théorie symplectique des champs l'impossibilité de plonger le fibré unitaire cotangent d'une surface orientable hyperbolique comme hypersurface de type contact dans une variété symplectique de dimension quatre rationnelle ou réglée. On montre également que toute sphère pseudo-holomorphe de nombre de Chern strictement positif dans une variété symplectique de dimension quatre peut être isotopée symplectiquement de façon à éviter toute surface lagrangienne orientable de genre strictement positif donnée. Plus généralement, on introduit la notion de classe effective, généralisant les classes d'homologies ayant un invariant de Gromov-Witten non-nul, on montre que ces dernières sont orthogonales aux tores lagrangiens et qu'elles fournissent des invariants par transformations birationnelles des variétés symplectiques de dimension quatre. On soulève pour finir quelques questions qui ressortent de ces travaux et on propose un rapide tour d'horizon de travaux réalisés par des collègues et qui ont un rapport avec les nôtres.

Remerciements : Je remercie le Centre national de la recherche scientifique ainsi que l'Agence nationale de la recherche pour leurs soutiens sans lesquels je n'aurais pu réaliser ces travaux. Merci également à l'unité de mathématiques pures et appliquées de l'École normale supérieure de Lyon de m'avoir accueilli et adopté en son sein et merci en particulier à Jean-Claude Sikorav pour nos nombreuses discussions sur l'analyse de l'opérateur de Cauchy-Riemann. Merci enfin à Yakov Eliashberg, Viatcheslav Kharlamov, François Lalonde, Dietmar Salamon, Jean-Claude Sikorav, Claude Viterbo et Claire Voisin d'avoir bien voulu examiner ce travail ou participer à mon jury.

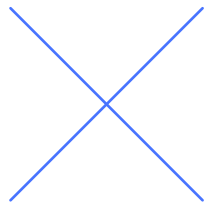
2 Invariants énumératifs des variétés symplectiques réelles de dimension quatre

2.1 Définition des invariants

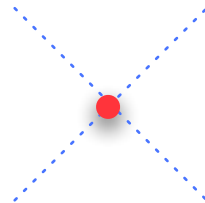
Soit (X, ω, c_X) une *variété symplectique réelle* fermée de dimension quatre, par quoi on entend une variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) équipée d'une involution c_X satisfaisant la relation $c_X^* \omega = -\omega$. Le lieu fixe $\mathbb{R}X$ de cette involution est supposé ici non-vide, c'est le *lieu réel* de la variété, lequel a la propriété d'être lagrangien. Ses composantes connexes sont étiquetées $(\mathbb{R}X)_1, \dots, (\mathbb{R}X)_N$. On note \mathcal{J}_ω l'espace des structures presque-complexes ω -positives de (X, ω) de classe C^l , $l \gg 1$ et $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{J}_\omega$ le sous-espace des structures J qui rendent l'involution c_X J -antiholomorphe. Ce sont tous deux des variétés de Banach non-vides et contractiles.

Soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ une classe d'homologie satisfaisant la relation $(c_X)_* d = -d$ et $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ une structure presque-complexe générique. Les *courbes J -holomorphes rationnelles réelles* homologues à d , c'est-à-dire les sphères J -holomorphes invariantes par c_X homologues à d , forment alors un espace de dimension $c_1(X)d - 1$, où $c_1(X)$ désigne la première classe de Chern de la variété (X, ω) . Nous supposons cette dimension positive ou nulle, puisque le cas contraire signifie que l'espace en question est vide, puis faisons chuter cette dimension à zéro en imposant quelques contraintes à ces courbes, à savoir de passer par une collection \underline{x} de $c_1(X)d - 1$ points distincts. Ces derniers peuvent être choisis réels, c'est-à-dire fixés par c_X , ou bien complexes conjugués, c'est-à-dire échangés par c_X ; nous noterons r_i le nombre de points réels choisis dans $(\mathbb{R}X)_i$, $i \in \{1, \dots, N\}$, et r_X le nombre de paires de points complexes conjugués, de sorte que $2r_X + \sum_{i=1}^N r_i = c_1(X)d - 1$. L'ensemble $\mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$ des courbes J -holomorphes rationnelles réelles homologues à d qui satisfont ces contraintes supplémentaires est fini. Ces courbes sont de plus toutes irréductibles, immergées et n'ont que des points doubles transverses comme singularités. Remarquons que le cardinal $R_d(\underline{x}, J) = \#\mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$ dépend en général des choix auxiliaires de la structure presque complexe et de la configuration de points, essentiellement parce que le corps des réels n'est pas algébriquement clos. Nous allons montrer qu'il en devient indépendant lorsque l'on compte ces courbes en fonction d'un signe convenablement choisi.

Soit $C \in \mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$, le nombre total de points doubles de C est donné par la formule d'adjonction et vaut $\delta = \frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)$. Les points doubles réels de C sont de deux natures différentes. Ils peuvent être l'intersection locale de deux branches réelles ou bien l'intersection locale de deux branches complexes conjuguées. Ces points doubles réels sont dits *non-isolés* dans le premier cas et *isolés* dans le second



Point double réel non isolé



Point double réel isolé

Notons $m(C)$ le nombre de points doubles réels isolés de C , c'est la *masse* de C ; elle est majorée par δ . Pour tout entier m compris entre 0 et δ , on note $n_d(m)$ le nombre de courbes

$C \in \mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$ de masse m . Posons finalement

$$\chi_r^d(\underline{x}, J) = \sum_{m=0}^{\delta} (-1)^m n_d(m),$$

où $r = (r_1, \dots, r_N)$.

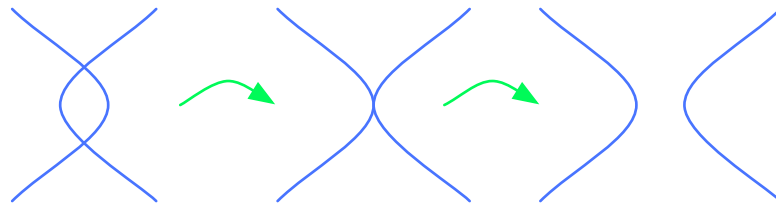
Théorème 2.1 (voir [38], [42]) *Soient (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre, N le nombre de composantes connexes de son lieu réel et $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ satisfaisant $c_1(X)d > 0$. Soient $\underline{x} \subset X$ une configuration réelle de $c_1(X)d - 1$ points distincts et $r = (r_1, \dots, r_N)$ le N -uplet associé. L'entier $\chi_r^d(\underline{x}, J)$ est indépendant du choix de \underline{x} et du choix générique de $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$.*

Ce Théorème 2.1 permet de noter cet entier χ_r^d , sans ambiguïté. Lorsque $\sum_{i=1}^N r_i$ n'a pas la même parité que $c_1(X)d - 1$, on pose $\chi_r^d = 0$. On note alors $\chi^d[T]$ la fonction génératrice $\sum_{|r|=0}^{c_1(X)d-1} \chi_r^d T^r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$, où $T^r = T_1^{r_1} \dots T_N^{r_N}$ et $|r| = r_1 + \dots + r_N$. Cette fonction est de même parité que $c_1(X)d - 1$ et tous ses monômes ne dépendent en fait que d'une indéterminée. En effet, la partie réelle d'une sphère holomorphe réelle étant connexe, l'invariant χ_r^d est contraint de s'annuler lorsque les points réels de \underline{x} ne sont pas tous choisis dans une même composante L du lieu réel. On adoptera la notation $\chi_r^d(L)$ pour indiquer que les $|r|$ points réels sont choisis dans L . On renvoie le lecteur à [42] pour une étude de la dépendance de χ_r^d en fonction de r .

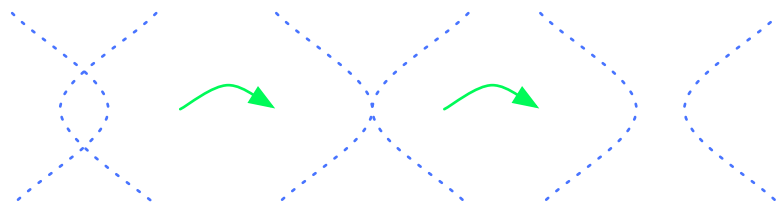
Ainsi, la fonction $\chi : d \in H_2(X; \mathbb{Z}) \mapsto \chi^d[T] \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$ ne dépend que de la variété symplectique réelle fermée de dimension quatre (X, ω, c_X) et est invariante par déformation de cette dernière. Ceci signifie que si ω_t est une famille continue de formes symplectiques satisfaisant $c_X^* \omega_t = -\omega_t$, alors la fonction χ est la même pour tous ces triplets (X, ω_t, c_X) .

Esquisse de la démonstration :

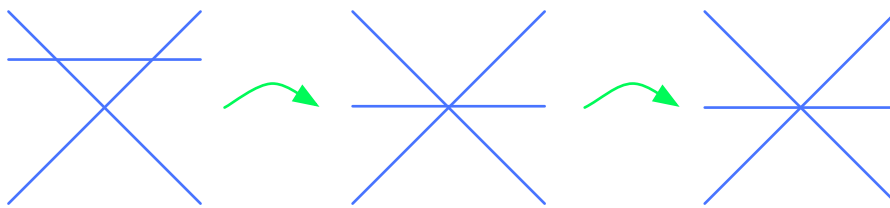
On commence par construire l'espace des modules des couples (C, J) formés d'une structure presque-complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ et d'une courbe J -holomorphe rationnelle réelle C homologue à d , contenant \underline{x} et qui n'est pas un revêtement multiple d'une autre courbe. Cet espace est une variété de Banach de régularité finie munie d'une projection Fredholm π d'indice nul sur $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. On peut sans perte de généralité supposer la configuration \underline{x} fixée une fois pour toute. Relions deux structures presque-complexes génériques par un chemin générique $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. Au dessus d'un tel chemin, l'espace des modules des couples (C, J) est une variété de dimension un. L'entier $\chi_r^d(\underline{x}, \gamma(t))$ est alors bien défini pour toute valeur $t \in [0, 1]$ à l'exception peut-être d'un nombre fini de valeurs $0 < t_1 < \dots < t_j < 1$. On montre alors que ces dernières valeurs ne peuvent correspondre qu'à l'apparition d'une courbe J_{t_i} -holomorphe homologue à d , contenant \underline{x} et qui est soit réductible, soit irréductible mais possédant un unique point singulier qui n'est pas double ordinaire. Ce dernier ne peut alors être qu'un point de rebroussement réel de première espèce, un point triple réel ordinaire ou un point de tangence de deux branches ; on montre en effet que ce sont les seules singularités pouvant apparaître au-dessus d'un chemin générique. La fonction $t \mapsto \chi_r^d(\underline{x}, \gamma(t))$ est constante entre ces valeurs particulières $0 < t_1 < \dots < t_j < 1$ et il s'agit de montrer qu'elle reste inchangée au passage de ces valeurs. Dans le cas de l'apparition d'un point triple réel ordinaire ou d'un point de tangence de deux branches, cette invariance se vérifie facilement, elle est illustrée par les figures suivantes.



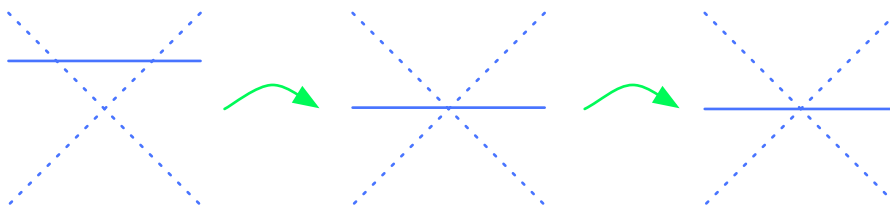
Apparition d'un point de tangence non isolé de deux branches



Apparition d'un point de tangence isolé de deux branches



Apparition d'un point triple réel ordinaire non isolé



Apparition d'un point triple réel ordinaire isolé

L'apparition d'une courbe J_{t_i} -holomorphe réductible manifeste l'absence de propriété de π . Une telle courbe n'a que des points doubles réels ordinaires comme singularités et que deux composantes irréductibles, toutes deux réelles. On montre dans ce cas que lorsque t tend vers t_i , le nombre de courbes J_t -holomorphes rationnelles réelles homologues à d et contenant \underline{x} chute d'une quantité égale au nombre de points d'intersections réels entre les deux composantes de la courbe réductible moins un. En effet, on montre qu'il y a autant de courbes J_t -holomorphes rationnelles réelles homologues à d et contenant \underline{x} qui dégénèrent sur la courbe réductible que de points d'intersections réels entre ses deux composantes, une pour chacun de ces points. Chacune de ces courbes s'obtient en fait en lissant un de ces points d'intersection. En particulier, ces courbes ont toutes la même masse que la courbe

réductible. Ceci valant de part et d'autre de la valeur t_i , l'entier $\chi_r^d(\underline{x}, \gamma(t))$ reste inchangé au passage de cette valeur. Enfin, on montre que les courbes ayant un point de rebroussement sont les points critiques de π . Celles pour lesquelles le point de rebroussement est ordinaire de première espèce correspondent à des points critiques non-dégénérés, soit l'apparition ou bien la disparition de deux courbes réelles. On montre que ces deux courbes réalisent les deux perturbations réelles du point de rebroussement de première espèce, l'une présentant un point double réel non-isolé dans son voisinage et l'autre un point double réel isolé. Ces deux courbes ont donc une masse qui diffère de un, de sorte que l'entier $\chi_r^d(\underline{x}, \gamma(t))$ reste encore inchangé. C'est dans ce dernier cas que le signe avec lequel on a compté les courbes est essentiel. \square

2.2 Bornes inférieures et optimalité

Le nombre $R_d(\underline{x}, J)$ de courbes J -holomorphes rationnelles réelles homologues à d qui contiennent l'ensemble \underline{x} de points que l'on s'est donné se retrouve ainsi borné inférieurement par la valeur absolue de l'invariant χ_r^d . Ce nombre est par ailleurs toujours majoré par le nombre total de courbes J -holomorphes rationnelles homologues à d et contenant \underline{x} , lequel nombre N_d ne dépend ni de J générique, ni de \underline{x} ; c'est un invariant de Gromov-Witten de genre zéro de la variété (X, ω) . Ainsi,

Corollaire 2.2 (voir [42]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, l'encadrement*

$$|\chi_r^d| \leq R_d(\underline{x}, J) \leq N_d$$

vaut pour tout choix de \underline{x} et tout choix générique de $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. \square

Les bornes inférieures apparaissant dans ce Corollaire 2.2 se trouvent être parfois optimales. C'est-à-dire qu'il est parfois possible d'exhiber une configuration \underline{x} et une structure générique $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ telles que toutes les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d le sont en fonction d'un unique et même signe. Nous présentons dans ce paragraphe les situations dans lesquelles nous avons été en mesure de montrer cette optimalité.

Théorème 2.3 (voir [47], [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre et soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ une classe d'homologie satisfaisant $(c_X)_*d = -d$. Supposons que le lieu réel de cette variété possède une sphère ou un plan projectif réel L . Dans ce dernier cas, supposons que (X, ω, c_X) est elle-même symplectomorphe au plan projectif complexe éclaté en six boules complexes conjuguées au maximum. Les bornes inférieures apparues dans le Corollaire 2.2 sont sous ces hypothèses optimales dès que $0 \leq r \leq 1$. Le signe de l'invariant $\chi_r^d(L)$ est en outre dans ce cas déterminé par l'inégalité $(-1)^{\frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)} \chi_r^d(L) \geq 0$.*

Remarque 2.4 La dernière partie du Théorème 2.3 signifie que le signe du coefficient de plus bas degré du polynôme $\chi^d(T)$ introduit au paragraphe 2.1 s'interprète comme la parité du genre lisse de la classe d . Le fait que ce signe puisse être négatif en degrés congrus à trois ou quatre modulo quatre dans le plan projectif complexe met en défaut la Conjecture 6 de [20].

Corollaire 2.5 (voir [48]) *Soit d une classe d'homologie de dimension deux du plan projectif complexe ou de la quadrique ellipsoïde et $0 \leq r \leq 1$. Les bornes inférieures (2.2) sont atteintes pour la structure complexe standard lorsque les points complexes conjugués sont choisis très proches d'une conique imaginaire pure dans le premier cas et d'une section hyperplane réelle disjointe de L dans le second. \square*

Théorème 2.6 (voir [48]) Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre dont le lieu réel possède un tore L et soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ une classe d'homologie satisfaisant $(c_X)_*d = -d$. Les bornes inférieures du Corollaire 2.2 sont optimales lorsque $r = 1$. Lorsque le lieu réel est connexe -réduit au tore L -, l'invariant $\chi_1^d(L)$ est en outre positif. Dans le cas général, le signe de l'invariant $\chi_1^d(L)$ est déterminé par l'inégalité $(-1)^{\frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)}\chi_1^d(L) \geq 0$ lorsque le lieu réel des courbes rationnelles ne s'annule pas dans $H_1(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, tandis qu'il est déterminé par l'inégalité $(-1)^{\frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)}\chi_1^d(L) \leq 0$ lorsque ce dernier s'annule.

Remarque 2.7 Dans le cas particulier de la quadrique hyperboloïde, la positivité de $\chi_1^d(L)$ avait été observée dans [20] par d'autres méthodes.

De savoir si les bornes supérieures apparues dans le Corollaire 2.2 sont optimales est un problème classique de géométrie énumérative réelle pour lequel on ne sait presque rien. Le seule chose que je puisse signaler est le critère suivant.

Corollaire 2.8 (voir [42]) Sous les hypothèses du Théorème 2.1, supposons que χ_r^d est positif (resp. négatif). Supposons qu'il existe une configuration réelle de points \underline{x} et une structure générique $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ telles qu'il existe $\frac{1}{2}(N_d - |\chi_r^d|)$ courbes J -holomorphes rationnelles réelles de masses impaires (resp. paires) homologues à d et passant par \underline{x} . Alors, toutes les courbes J -holomorphes rationnelles homologues à d et passant par \underline{x} sont réelles, de sorte que les bornes supérieures du Corollaire 2.2 sont optimales. \square

Esquisse de la démonstration des Théorèmes 2.3 et 2.6

On sait depuis [33] qu'un voisinage de L dans (X, ω) est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle dans le fibré cotangent T^*L . On peut sans perte de généralité supposer ce voisinage bordé par le fibré unitaire cotangent $S^*L = \{(q, p) \in T^*L \mid \|p\| = 1\}$ pour une métrique à courbure constante sur L et invariant par c_X . Ce fibré muni de la restriction de la forme de Liouville λ est une variété de contact de dimension trois dont un voisinage dans (X, ω) se trouve être symplectomorphe à une partie $(S^*L \times]-\epsilon, \epsilon[, d(e^t\lambda))$ de sa symplectisée. Une telle partie est appelé un *cou*. Comme édicté par la théorie symplectique des champs [11], on se restreint aux structures presque-complexes génériques $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ qui dans ce cou envoient le champ de Liouville $\partial/\partial t$ sur le champ de Reeb de (S^*L, λ) , préservent les plans de contact et demeurent invariants par translation dans le second facteur. Nos résultats s'obtiennent en allongeant une telle structure presque-complexe dans le cou jusqu'à lui conférer une longueur arbitrairement grande, ce que l'on peut faire sans perturber la forme symplectique ω . L'optimalité des bornes inférieures apparues dans le Corollaire 2.2 s'obtient pour toutes structures presque-complexes génériques ayant un cou suffisamment long au voisinage de L . En effet, toutes les courbes rationnelles réelles comptées par $\chi_r^d(\underline{x}, J)$ sont rigides si l'on tient compte de leurs conditions d'incidence. Si l'on allonge le cou d'une structure presque complexe jusqu'à briser la variété en deux morceaux T^*L et $X \setminus L$, ces courbes se brisent en courbes à deux étages d'énergie de Hofer finie (voir [4]) et soumises aux mêmes conditions d'incidence. On montre que ces dernières courbes doivent également être rigides si l'on tient compte de leurs conditions d'incidence. Rappelons que ces courbes sont non-compactes, conformes à une surface de Riemann réductible pointée proprement plongée et asymptotes au voisinage de leurs pointes à des cylindres sur des orbites de Reeb fermées. Soit C une composante irréductible réelle d'une telle courbe plongée dans T^*L et v le nombre de paires de ses pointes complexes conjuguées. À chacune de ces paires de pointes est associé un entier qui correspond au nombre

de fois que l'orbite de Reeb fermée limite parcourt l'orbite simple sous-jacente, on note k la somme de ces entiers.

Il suit des résultats de la thèse de Frédéric Bourgeois [3] que l'indice d'une telle courbe C , c'est-à-dire la dimension attendue de son espace de déformations, vaut $2k + 2v - 1$ si L est une sphère, $k + 2v - 1$ si L est un plan projectif réel et $2v - 1$ si L est un tore. Dans le premier cas, la seule condition d'incidence à laquelle est soumise C est de passer par un point réel, ce qui fait chuter son indice de un. La seule courbe rigide avec cette condition est un cylindre réel sur une orbite de Reeb simple, l'orbite de Reeb étant prescrite. En effet, $k = v = 1$ et l'indice calculé ci-dessus valant trois, il chute à zéro une fois l'orbite prescrite et la condition d'incidence satisfaite. On montre qu'un tel cylindre est plongé à l'aide d'une « formule d'adjonction relative », c'est-à-dire qu'il est plongé pour la même raison qu'une section plane irréductible d'une quadrique est plongée. Le résultat en découle : peu avant la brisure de la variété, toutes les courbes rationnelles réelles comptées par $\chi_r^d(\underline{x}, J)$ ont leurs parties réelles plongées, de sorte que leurs points doubles réels éventuels sont tous isolés. Ce nombre de points doubles réels isolés, c'est-à-dire par définition la masse de ces courbes, est donc de même parité que le nombre total δ de points doubles de C , le genre lisse de la courbe. Si L est un plan projectif réel et $r = 0$, C doit de même être un cylindre sur une orbite de Reeb simple prescrite, tandis que si $r = 1$, C peut être un cylindre sur une orbite de Reeb double prescrite ou bien une sphère à quatre pointes asymptote à quatre orbites de Reeb simples. On montre que ces courbes sont toutes plongées à l'aide d'une formule d'adjonction relative, elles le sont pour la même raison qu'une courbe plane irréductible de degré un ou deux est plongée. On conclut alors comme dans le cas d'une sphère. Si L est un tore, seul un cylindre sur une orbite de Reeb simple non-prescrite satisfait nos hypothèses et un tel cylindre peut être multiplement revêtu. Toutefois le cylindre simple sous-jacent est plongé. On en déduit que peu avant la brisure de la variété, toutes les courbes rationnelles réelles comptées par $\chi_r^d(\underline{x}, J)$ possédaient un nombre de points doubles réels non-isolés pair si le degré du revêtement est impair et impair sinon. En effet, la perturbation du revêtement l -uple d'une courbe simple du tore produit $l - 1$ points d'auto-intersection modulo deux. Le nombre de points doubles réels isolés de ces courbes rationnelles se trouve donc être de la même parité que le genre lisse de la courbe lorsque le lieu réel des courbes rationnelles est non-nul dans $H_1(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et de la parité opposée lorsque celui-ci s'annule. \square

2.3 Congruences

Étant donnée une classe d'homologie $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ d'une variété symplectique réelle de dimension quatre (X, ω, c_X) , nous noterons $g_d = \frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)$ le genre lisse de d et $c_d = c_1(X)d - 1$ le degré attendu du polynôme $\chi^d(T)$ défini au §2.1.

Théorème 2.9 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre dont le lieu réel possède une composante connexe L homéomorphe à une sphère. Soient $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ et $r \in \mathbb{N}$. Lorsque $2r + 1 < c_d$, la puissance $2^{\frac{1}{2}(c_d - 2r - 1)}$ divise $\chi_r^d(L)$.*

Exemple :

Le Théorème 2.9 s'applique à l'ellipsoïde de dimension deux lorsque d est un multiple positif, disons $\delta > 0$, d'une section plane réelle. Dans ce cas, $c_d = 4\delta - 1$ et $g_d = \delta^2 - 2\delta + 1 = \delta + 1 \pmod{2}$. Par conséquent, $2^{2\delta - r - 1}$ divise $\chi_r^d(L)$ lorsque $r < 2\delta - 1$. Nous avons également

montré dans [48] que $2^{2\delta-r}$ divise $\chi_r^d(L)$ lorsque de plus $r = 2\delta + 1 \pmod{4}$ ainsi que la congruence $\chi_{2\delta-3}^d(L) = 0 \pmod{16}$.

Théorème 2.10 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe au plan projectif complexe éclaté en six boules complexes conjuguées au maximum. Soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ une classe satisfaisant $c_d = c_1(X)d - 1 \geq 0$ et soient r, r_X des entiers naturels satisfaisant la relation $r + 2r_X = c_d$. Lorsque $r + 1 < r_X$, la puissance 2^{r_X-r-1} divise $\chi_r^d(L)$.*

Exemple :

Le Théorème 2.10 s'applique au plan projectif complexe où d est un multiple positif, disons $\delta > 0$, d'une droite complexe. Dans ce cas, $8^{\frac{1}{2}(\delta-r-1)}$ divise χ_r^d lorsque $r + 1 < \delta$. Nous avons également montré dans [48] que $2^{\frac{1}{2}(3\delta-3r-1)}$ divise χ_r^d lorsque de plus $r = \delta + 1 \pmod{4}$ et $\chi_{\delta-3}^d = 0 \pmod{64}$.

Esquisse de la démonstration des Théorèmes 2.9 et 2.10

La stratégie est la même que celle suivie dans la démonstration des Théorèmes 2.3 et 2.6. On allonge le cou d'une structure presque complexe générique jusqu'à briser la variété en deux morceaux T^*L et $X \setminus L$, ceci de sorte que les points complexes conjugués de notre configuration se retrouvent dans le complémentaire $X \setminus L$. Les courbes rationnelles réelles comptées par $\chi_r^d(\underline{x}, J_t)$ se brisent alors en courbes à deux étages d'énergie de Hofer finie (voir [4]) et soumises aux mêmes conditions d'incidence. On montre que ces dernières courbes doivent être rigides si l'on tient compte de leurs conditions d'incidence. L'ensemble fini de courbes à deux étages que l'on obtient s'organise en classes d'équivalences selon leur combinatoire, laquelle est codée par un arbre étiqueté, voir le §2.4 ou [48]. Nous montrons en fait que la contribution de chaque classe d'équivalence à $\chi_r^d(\underline{x}, J_t)$ est divisible par la puissance de deux annoncée dans le Théorème 2.9 ou 2.10 respectivement. Soit C une telle courbe à deux étages et A_C la classe d'équivalence des courbes ayant même combinatoire. Notons $C_1, \overline{C}_1, \dots, C_j, \overline{C}_j$ (resp. C_0) les composantes complexes conjuguées de C immergées dans $X \setminus L$ (resp. T^*L) qui sont soumises à des conditions d'incidence et r_1, \dots, r_j le nombre de ces conditions, de sorte que leur somme vaille r_X . Il y a 2^{r_i-1} partitions d'un ensemble de r_i points complexes conjugués en deux ensembles complexes conjugués, soit ici 2^{r_X-j} façons de répartir les paires de points complexes conjugués entre les composantes C_i et \overline{C}_i . Une fois attribués à chaque courbe C_s l'ensemble de points qu'elle doit interpoler, certaines de ces courbes sont rigides et d'autres non. Notons j^- le nombre de telles paires de courbes rigides et $j^+ = j - j^-$. On montre que chacune de ces j^+ courbes converge vers une orbite de Reeb de S^*L adhérente à C_0 , laquelle orbite de Reeb est prescrite par C_0 . C'est cette condition supplémentaire qui rigidifie la courbe en question. Il y a deux bijections possibles entre une telle paire d'orbites de Reeb complexes conjuguées adhérentes à C_0 et une telle paire de courbes complexes conjuguées non-rigides, soit 2^{j^+} bijections au total. Ainsi, le nombre de courbes à deux étages ayant une combinatoire A_C est divisible par $2^{r_X-j^-}$. Or il suit du théorème de recollement en théorie symplectique des champs [3] que la contribution à l'invariant $\chi_r^d(L)$ d'une courbe à deux étages ne dépend que de sa combinatoire, de sorte que $2^{r_X-j^-}$ divise $\chi_r^d(L)$. Notons v_0 le nombre de paires de ses pointes complexes conjuguées de C_0 et k_0 la somme sur toutes ces paires du nombre de fois que l'orbite de Reeb fermée limite parcourt l'orbite simple sous-jacente. L'indice de la courbe C_0 , c'est-à-dire la dimension attendue de son espace de déformations, vaut $2k_0 + 2v_0 - 1$ si L est une sphère et $k_0 + 2v_0 - 1$ si L est un plan projectif réel.

Il s'avère que lorsque L est un sphère, toutes les composantes de $X \setminus L$ sont en fait connectées à C_0 , cette dernière est rigidifiée par ses r conditions d'incidence auxquelles s'ajoutent la nécessité de converger vers des orbites de Reeb prescrites, disons j_0 paires, en particulier une paire d'orbites complexes conjuguées pour chacune des j^- courbes rigides. On en déduit l'équation

$$r + 2j_0 = 2k_0 + 2v_0 - 1 \quad (1)$$

qui impose $r + 1 \geq 2k_{s_0}$. On en déduit $2j^- \leq 2v_{s_0} \leq 2k_{s_0} \leq r + 1$ et le résultat énoncé dans le Théorème 2.9.

Lorsque L est un plan projectif réel, parmi les j^- paires de courbes rigides, certaines sont adjacentes à C_0 et d'autres non. Notons j_1^-, j_2^- leurs nombres respectifs, de sorte que $j_1^- + j_2^- = j^-$. On déduit alors de même l'équation $r + 2j_0 = k_{s_0} + 2v_{s_0} - 1$ qui impose $r + 1 \geq k_{s_0}$, d'où découle $j_1^- \leq v_{s_0} \leq k_{s_0} \leq r + 1$. Ainsi, $2^{r_X - r - 1 - j_2^-}$ divise $\chi_r^d(L)$ et pour démontrer le Théorème 2.10, il s'agit d'améliorer cette congruence de $2^{j_2^-}$. On montre en fait que chacune de ces j_2^- paires de courbes rigides non-adjacentes à C_0 est adjacente à une paire de cylindres complexes conjugués de T^*L . Une telle paire de cylindres relie entre eux deux paires d'orbites de Reeb complexes conjuguées. Or il y a deux façons d'apparier ces paires d'orbites, soit $2^{j_2^-}$ bijections au total, ce qui fini de démontrer le Théorème 2.10. \square

2.4 Calculs

2.4.1 Dans le plan projectif complexe

Soient r, r_X et d trois entiers naturels satisfaisant la relation $r + 2r_X = 3d - 1$.

Définition 2.11 *Un arbre projectif est un arbre fini connexe dont toutes les arêtes sont étiquetées par des entiers strictement positifs. De plus, un tel arbre possède une racine s_0 et tous les sommets à distance paire de s_0 sont soit monovalents connectés à une arête double, soit bivalents connectés à deux arêtes simples.*

On note \mathcal{B}_r l'ensemble des arbres projectifs qui satisfont

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 \leq r \leq \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 + 2v(s_0) \text{ et } r = \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 \pmod{2},$$

où $v(s)$ désigne la valence d'un sommet s , $\mathcal{A}(s)$ l'ensemble des arêtes adjacentes à s et $k(a)$ désigne la multiplicité de l'arête a . Notons également k_s la somme des multiplicités des arêtes adjacentes au sommet s et k la multiplicité totale de toutes les arêtes de l'arbre. On pose $r_L(s_0) = \frac{1}{2}(\sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 + 2v(s_0) - r)$, de sorte que $0 \leq r_L(s_0) \leq v(s_0)$. Enfin, on note S_1 (resp. S_2) l'ensemble des sommets à distance impaire (resp. paire) de s_0 .

Définition 2.12 *Un arbre projectif décoré est un arbre projectif $A \in \mathcal{B}_r$ équipé d'une partition $S_1^+ \sqcup S_1^-$ de l'ensemble des sommets adjacents à s_0 telle que $\#S_1^- = r_L(s_0)$ et $\#S_1^+ = v(s_0) - r_L(s_0)$. Cet arbre est de plus équipé des fonctions :*

- $f_A : S_1 \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, r_X\})$ satisfaisant $f_A(s) \cap f_A(s') = \emptyset$ dès que $s \neq s'$ et $\cup_{s \in S_1} f_A(s) = \{1, \dots, r_X\}$.
- $g_A : S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $k + 4 \sum_{s \in S_1} g_A(s) = d$ et pour tout $s \in S_1^+$ (resp. $s \in S_1^-$), $6g_A(s) + k_s + v(s) - 1 = \#f_A(s) + 1$ (resp. $6g_A(s) + k_s + v(s) - 1 = \#f_A(s)$).

On note \mathcal{B}_r^d l'ensemble fini des arbres projectifs décorés. Soit $A \in \mathcal{B}_r^d$, on pose $m_1^-(A) = \prod_{s \in S_1^-} \#\{a \in \mathcal{A}(s) \mid k(a) = k(ss_0)\}$, où $k(ss_0)$ désigne la multiplicité de l'arête reliant s à s_0 . On note de même $m_1^+(A)$ le nombre d'injections $\phi : \{s \in S_1^+ \mid f_A(s) \neq \emptyset\} \rightarrow \mathcal{A}^+(s_0)$ satisfaisant $k(\phi(s)) = k(ss_0)$ pour tous les sommets $s \in S_1^+$, où $\mathcal{A}^+(s_0)$ désigne l'ensemble des arêtes reliant s_0 à un sommet de S_1^+ . Notons enfin S_2^b l'ensemble des sommets bivalents de $S_2 \setminus \{s_0\}$. L'arbre A privé de ces sommets bivalents n'est pas connexe. On note $m_2(A)$ le nombre de façons de reconnecter $A \setminus S_2^b$ de manière à obtenir un arbre isomorphe à A . Posons

$$\text{mult}(A) = 2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0) + \#S_2^b} m_1^+(A) m_1^-(A) m_2(A) \prod_a k(a).$$

C'est la *multiplicité* de l'arbre $A \in \mathcal{B}_r^d$.

Soit Σ_4 la surface rationnelle réglée de degré quatre, e la classe d'une section holomorphe d'autointersection quatre et f la classe d'une fibre. Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}$ et α, β des suites d'entiers positifs, on note $N_4^{ae+bf}(\alpha, \beta)$ le nombre de courbes rationnelles de Σ_4 , homologues à $ae + bf$, ayant $\alpha_i + \beta_i$ points de tangence d'ordre i avec la section exceptionnelle de Σ_4 parmi lesquels α_i sont prescrits et qui passent par le nombre adéquat de points fixés.

Théorème 2.13 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe au plan projectif complexe et $r, r_X, d \in \mathbb{N}$ satisfaisant la relation $r + 2r_X = 3d - 1$. Alors,*

$$\chi_r^d = \sum_{A \in \mathcal{B}_r^d} (-1)^{\#S_2^+} \text{mult}(A) F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_4^{g_A(s)e+k(s)f}(0, \beta_A) \prod_{s \in S_1^+} N_4^{g_A(s)e+k(s)f}(e_{k(ss_0)}, \beta_A^0),$$

où $(\alpha_A^-)_i$ (resp. $(\beta_A^+)_i$) vaut le nombre d'arêtes de multiplicité i reliant S_1^- (resp. S_1^+) à s_0 , $(\beta_A)_i$ (resp. $(\beta_A^0)_i$) vaut le nombre d'arêtes de multiplicité i adjacentes à s (resp. moins un si l'arête reliant s à s_0 est de multiplicité i) et $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$ désigne l'invariant défini dans le fibré cotangent du plan projectif réel, voir le Théorème 3.6.

Démonstration du Théorème 2.13 :

On utilise encore une fois le procédé d'allongement et de brisure issu de la théorie symplectique des champs en allongeant le cou d'une structure presque complexe générique jusqu'à briser la variété en deux morceaux $T^*\mathbb{R}P^2$ et $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2$. Les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d se brisent en courbes à deux étages interpolant r points de $\mathbb{R}P^2$ et r_X paires de points complexes conjugués de $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2$. On montre que chaque composante de cette courbe à deux étages est rigide avec ses conditions d'incidence. Soit C une telle composante irréductible, v_C le nombre de ses pointes et k_C la somme sur toutes ces pointes du nombre de fois que l'orbite de Reeb fermée limite parcourt l'orbite simple sous-jacente. L'indice de C vaut alors $k_C + 2v_C - 2$. Par suite, les seules composantes immergées dans T^*L sont des cylindres asymptotes à des orbites de Reeb simples, des plans asymptotes à des orbites doubles auxquels s'ajoutent une composante réelle C_0 qui interpole les r points fixés dans $\mathbb{R}P^2$. Chaque courbe à deux étages limite C peut être codée par un arbre A_C ayant une racine s_0 et ses arêtes équipées de multiplicités entières strictement positives. Chaque sommet de cet arbre représente une composante du quotient de la courbe limite par l'action de c_X , composante qui se trouve dans l'étage T^*L si ce sommet est à distance paire de s_0 et dans l'étage $X \setminus L$ sinon. Le sommet s_0 représente la composante C_0 laissée invariante par l'involution de $T^*\mathbb{R}P^2$. Le quotient de cette composante est une

hémisphère pointée à bord dans L . Chaque arête adjacente à un sommet donné représente une asymptote de la composante correspondante à ce sommet et la multiplicité de l'arête n'est autre que la multiplicité de l'orbite de Reeb limite correspondante. L'arbre A_C vient de plus avec une fonction qui associe à chaque sommet à distance impaire de s_0 les classes d'homologies relatives de la paire de courbes correspondantes ainsi que les paires de points complexes conjugués de \underline{x} que ces courbes contiennent. Ainsi, les courbes à deux étages sont exactement codées par les arbres projectifs décorés $A \in \mathcal{B}_r^d$. Il s'agit donc de dénombrer les courbes à deux étages qui sont codées par un arbre donné $A \in \mathcal{B}_r^d$, puis de dénombrer les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le nombre de façons de répartir les points complexes conjugués parmi les composantes de la courbe à deux étages qui se trouvent dans $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{R}P^2$ a été calculé dans la démonstration du Théorème 2.10 et vaut $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0)}$. Les composantes codées par $S_1 \setminus S_1^+$ sont rigides avec leurs conditions d'incidence, il y en a $\prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_4^{g_A(s)e + k(s)f}(0, \beta_A)$. Puis, il y a $m_1^-(A)$ façons de choisir les orbites de Reeb prescrites de la courbe codée par s_0 . Le nombre de courbes réelles codées par s_0 satisfaisant nos conditions d'incidence et comptées avec signe vaut $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$. Il y a alors $m_1^+(A)$ façons de choisir la manière de connecter les courbes codées par S_1^+ aux orbites de Reeb restées libres de la courbe codée par s_0 . Il y a enfin $2^{\#S_2^b} m_2(A)$ façons de connecter ces composantes entre elles par des paires de cylindres complexes conjugués de $T^*\mathbb{R}P^2$ codés par les sommets bivalents de S_2^b . Ceci fournit $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0) + \#S_2^b} m_1^+ m_1^- m_2 F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_4^{g_A(s)e + k(s)f}(0, \beta_A) \prod_{s \in S_1^+} N_4^{g_A(s)e + k(s)f}(k(ss_0), \beta_A^0)$ courbes codées par un arbre donné $A \in \mathcal{B}_r^d$. Or, d'après le théorème de recollement de théorie symplectique des champs [3], il y a $\prod_a k(a)$ courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le résultat découle à présent du fait que chaque courbe codée par $S_2 \setminus \{s_0\}$ intersecte $\mathbb{R}P^2$ en un point et contribue donc à la masse des courbes J -holomorphes rationnelles réelles en question, d'où le signe $(-1)^{\#S_2+1}$. \square

Corollaire 2.14 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe au plan projectif complexe. Alors, $\chi^4(T) = o(T^2)$, $\chi^5(T) = 64 + 64T^2 + o(T^3)$, $\chi^6(T) = 1024T + 1536T^3 + o(T^4)$, $\chi^7(T) = -14336 + 11776T^2 + o(T^3)$ et $\chi^8(T) = -280576T + o(T^2)$.*

Démonstration du Corollaire 2.14 :

L'annulation de χ_1^4 tient au fait que l'ensemble d'arbres B_1^4 est vide. Les arbres intervenant dans la démonstration de ce Corollaire 2.14 sont représentés dans la Figure 2.4.1. Lorsque $d = 5$ et $r \leq 2$, un seul arbre décoré intervient. Le Théorème 2.13 fournit $\chi_0^5 = 2^6 F(e_1, 0) N^{e+f}(0, e_1) = 64$ et $\chi_2^5 = 2^6 F(0, e_1) N^{e+f}(e_1, 0) = 64$. Lorsque $d = 6$ et $r = 1$, deux arbres projectifs décorés interviennent qui sont représentés par la Figure 2.4.1. La contribution du premier vaut $C_8^1 2^6 F(2e_1, 0) N^{e+f}(0, e_1) = 512$ et celle du second donné par cette figure vaut $2^7 2F(e_2, 0) N^{e+2f}(0, e_2) = 2^9 N^{e+2f}(e_2, 0) = 512$, voir le Lemme 3.8, de sorte que $\chi_1^6 = 1024$. On renvoie le lecteur à [48] pour les calculs suivants tout à fait analogues. \square

2.4.2 Dans l'ellipsoïde de dimension deux

Soient r, r_X et d trois entiers naturels satisfaisant la relation $r + 2r_X = 4d - 1$, laquelle impose que r soit impair.

Définition 2.15 *Un arbre deux-sphérique est un arbre fini connexe dont toutes les arêtes sont étiquetées par des entiers strictement positifs. De plus, un tel arbre possède une racine s_0 et tous les sommets à distance paire de s_0 sont monovalents connectés à une arête simple.*

En particulier, la distance d'un sommet à s_0 est majorée par deux et seules les arêtes connectées à s_0 peuvent avoir une multiplicité non-triviale. On note \mathcal{A}_r l'ensemble des arbres deux-sphériques qui satisfont

$$2 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 \leq r \leq 2 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 + 2v(s_0),$$

où $v(s)$ désigne la valence d'un sommet s , $\mathcal{A}(s)$ l'ensemble des arêtes adjacentes à s et $k(a)$ désigne la multiplicité de l'arête a . Notons également k_s la somme des multiplicités des arêtes adjacentes au sommet s et k la multiplicité totale de toutes les arêtes de l'arbre. On pose $r_L(s_0) = \frac{1}{2}(2 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 1 + 2v(s_0) - r)$, de sorte que $0 \leq r_L(s_0) \leq v(s_0)$. Enfin, on note S_1 (resp. S_2) l'ensemble des sommets à distance impaire (resp. paire) de s_0 .

Définition 2.16 *Un arbre deux-sphérique décoré est un arbre deux-sphérique $A \in \mathcal{A}_r$ équipé d'une partition $S_1^+ \sqcup S_1^-$ de l'ensemble des sommets adjacents à s_0 telle que $\#S_1^- = r_L(s_0)$ et $\#S_1^+ = v(s_0) - r_L(s_0)$. Cet arbre est de plus équipé des fonctions :*

- $f_A : S_1 \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, r_X\})$ satisfaisant $f_A(s) \cap f_A(s') = \emptyset$ dès que $s \neq s'$ et $\cup_{s \in S_1} f_A(s) = \{1, \dots, r_X\}$.
- $g_A : S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $k + 2 \sum_{s \in S_1} g_A(s) = d$ et pour tout $s \in S_1^+$ (resp. $s \in S_1^-$), $4g_A(s) + k_s + v(s) - 1 = \#f_A(s) + 1$ (resp. $4g_A(s) + k_s + v(s) - 1 = \#f_A(s)$).

On note \mathcal{A}_r^d l'ensemble des arbres deux-sphériques décorés, c'est un ensemble fini. Soit $A \in \mathcal{A}_r^d$, on pose $m_1^-(A) = \prod_{s \in S_1^-} \#\{a \in \mathcal{A}(s) \mid k(a) = k(ss_0)\}$, où $k(ss_0)$ désigne la multiplicité de l'arête reliant s à s_0 , de sorte que chaque terme du produit vaille un ou $v(s)$. On note de même $m_1^+(A)$ le nombre d'injections $\phi : \{s \in S_1^+ \mid f_A(s) \neq \emptyset\} \rightarrow \mathcal{A}^+(s_0)$ satisfaisant $k(\phi(s)) = k(ss_0)$ pour tous les sommets $s \in S_1^+$. On pose alors

$$\text{mult}(A) = 2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0) + \#S_2 - 1} m_1^+(A) m_1^-(A) \prod_a k(a),$$

c'est la *multiplicité* de l'arbre $A \in \mathcal{A}_r^d$.

Soit Σ_2 la surface rationnelle réglée de degré deux, e la classe d'une section holomorphe d'autointersection deux et f la classe d'une fibre. Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}$ et α, β des suites d'entiers positifs, on note $N_2^{ae+bf}(\alpha, \beta)$ le nombre de courbes rationnelles de Σ_2 , homologues à $ae + bf$, ayant $\alpha_i + \beta_i$ points de tangence d'ordre i avec la section exceptionnelle de Σ_2 parmi lesquels α_i sont prescrits et qui passent par le nombre adéquat de points fixés.

Théorème 2.17 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe à la quadrique ellipsoïde de dimension deux, $r, r_X, d \in \mathbb{N}$ satisfaisant la relation $r + 2r_X = 4d - 1$ et h la classe d'une section plane réelle de bidegré $(1, 1)$. Alors,*

$$\chi_r^{dh} = \sum_{A \in \mathcal{A}_r^d} (-1)^{\#S_2 + 1} \text{mult}(A) F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_2^{g_A(s)e + k(s)f}(0, \beta_A) \prod_{s \in S_1^+} N_2^{g_A(s)e + k(s)f}(e_{k(ss_0)}, \beta_A^0),$$

où $(\alpha_A^-)_i$ (resp. $(\beta_A^+)_i$) vaut le nombre d'arêtes de multiplicité i reliant S_1^- (resp. S_1^+) à s_0 , $(\beta_A)_i$ (resp. $(\beta_A^0)_i$) vaut le nombre d'arêtes de multiplicité i adjacentes à s (resp. moins un si l'arête reliant s à s_0 est de multiplicité i) et $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$ désigne l'invariant défini dans le fibré cotangent de la sphère de dimension deux, voir le Théorème 3.6.

Remarque 2.18 Cet invariant χ_r^d peut se définir purement en termes de fractions rationnelles complexes. Lorsque $r = 4d - 1$ par exemple, il compte algébriquement le nombre de fractions rationnelles $u = P/Q$, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ de degrés d , modulo reparamétrage par les homographies réelles de $PGL_2(\mathbb{R})$, telles que l'image $u(\mathbb{R}P^1)$ interpole un ensemble donné générique de $4d - 1$ points de la sphère de Riemann. Le signe en fonction duquel il convient de compter ces fractions rationnelles u est pair si u possède un nombre pair de points critiques dans chaque hémisphère $\mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{R}P^1$ et impair sinon.

Démonstration du Théorème 2.17 :

La démonstration est la même que celle du Théorème 2.13. Après brisure de la variété en deux morceaux T^*S^2 et $X \setminus S^2$, on montre que les courbes à deux étages sont exactement codées par les arbres deux-sphériques décorés $A \in \mathcal{A}_r^d$. Il s'agit donc de dénombrer les courbes à deux étages qui sont codées par un arbre donné $A \in \mathcal{A}_r^d$, puis de dénombrer les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégénèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le nombre de façons de répartir les points complexes conjugués parmi les composantes de la courbe à deux étages qui se trouvent dans $X \setminus S^2$ a été calculé dans la démonstration du Théorème 2.9 et vaut $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0)}$. Les composantes codées par $S_1 \setminus S_1^+$ sont rigides avec leurs conditions d'incidence, il y en a $\prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_2^{g_A(s)e+k(s)f}(0, \beta_A)$. Puis, il y a $m_1^-(A)$ façons de choisir les orbites de Reeb prescrites de la courbe codée par s_0 . Le nombre de courbes réelles codées par s_0 satisfaisant nos conditions d'incidence et comptées avec signe vaut $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$. Il y a alors $m_1^+(A)$ façons de choisir la manière de connecter les courbes codées par S_1^+ aux orbites de Reeb restées libres de la courbe codée par s_0 . Enfin, chaque sommet de S_2 autre que s_0 code un plan J -holomorphe de T^*S^2 asymptote à une orbite de Reeb simple. Il y a deux tels plans pour une structure presque complexe générique J de T^*S^2 qui sont les deux relevés du plan de $T^*\mathbb{R}P^2$ asymptote à une orbite de Reeb double et se compactifient en les deux droites de la quadrique complexe passant par un point donné. Il y a donc $2^{\#S_2-1}$ façons de choisir les plans codés par les éléments de $S_2 \setminus \{s_0\}$. Ceci fournit $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1 \setminus S_1^+} \max(\#f_A(s) - 1, 0) + \#S_2 - 1} m_1^+(A) m_1^-(A) F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1 \setminus S_1^+} N_2^{g_A(s)e+k(s)f}(0, \beta_A) \prod_{s \in S_1^+} N_2^{g_A(s)e+k(s)f}(e_{k(ss_0)}, \beta_A^0)$ courbes codées par un arbre donné $A \in \mathcal{A}_r^d$. Or, d'après le théorème de recollement de théorie symplectique des champs [3], il y a $\prod_a k(a)$ courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégénèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le résultat découle à présent du fait que chaque plan codé par $S_2 \setminus \{s_0\}$ intersecte S^2 en un point et contribue donc à la masse des courbes J -holomorphes rationnelles réelles en question, d'où le signe $(-1)^{\#S_2+1}$. \square

Corollaire 2.19 (voir [48]) Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe à la quadrique ellipsoïde de dimension deux. On note h la classe d'une section plane réelle de bidegré $(1, 1)$. Alors, $\chi^{2h}(T) = 2T^3 + 4T^5 + 6T^7$, $\chi^{3h}(T) = 16T + 16T^2 + o(T^3)$, $\chi^{4h}(T) = -256T + 320T^3 + o(T^4)$ et $\chi^{5h}(T) = 26880T + o(T^2)$.

Démonstration du Corollaire 2.19 :

Le calcul de $\chi^{2h}(T)$ découle immédiatement du Lemme 3.7, puisque les seules composantes de $X \setminus L$ apparaissant sont des fibres. Les arbres intervenant dans la démonstration de ce Corollaire 2.19 sont représentés dans la Figure 2.4.2. Lorsque $d = 3$ et $r \leq 3$, un seul arbre décoré intervient. Le Théorème 2.13 fournit $\chi_1^{3h} = 2^4 F(e_1, 0) N^{e+f}(0, e_1) = 16$ et $\chi_3^{3h} = 2^4 F(0, e_1) N^{e+f}(e_1, 0) = 16$. Lorsque $d = 4$ et $r = 1$, un seul arbre deux-sphérique décoré A intervient dans le calcul de χ_r^{dh} . On obtient $\chi_1^{4h} = -2^7 2F(e_1, 0) N^{e+2f}(0, 2e_1) = -256$, puisque $m_1^-(A) = 2$. On renvoie le lecteur à [48] pour les calculs suivants tout à fait analogues. \square

3 Invariants relatifs des variétés symplectiques réelles de dimension quatre

Les invariants χ_r^d introduits au §2.1 sont définis par un comptage de courbes J -holomorphes rationnelles réelles soumises à des conditions d'incidence ponctuelles. Ils forment ainsi un analogue réel aux invariants de Gromov-Witten de genre zéro ponctuels. J'ai également défini de tels invariants en admettant que les courbes soient soumises à des conditions de tangence avec une courbe donnée, dans l'esprit de la théorie des invariants relatifs. Ces conditions de tangence peuvent être réelles ou bien complexe conjuguées. Dans le cas de conditions réelles, je n'ai pu définir de tels invariants relatifs qu'en admettant une seule condition de tangence et encore m'a-t-il fallu faire intervenir plusieurs types de courbes singulières. J'expose ces résultats dans le §3.1.1. J'ai pu en déduire des bornes inférieures pour le nombre de coniques réelles tangentes à cinq coniques données, un problème classique de géométrie énumérative. Dans le cas de conditions de tangence complexes conjuguées, la situation est bien meilleure et de tels invariants peuvent s'obtenir avec les mêmes méthodes que celles utilisées au §2.1. Je n'ai en fait introduit et utilisé ces invariants que dans des cas très particuliers, en utilisant le langage de la théorie symplectique des champs. Ils m'ont été utiles pour réaliser les calculs présentés au §2.4. J'expose ces résultats dans le §3.2.

3.1 Invariants relatifs réels

3.1.1 Définition des invariants

Soient (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension quatre, $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ une classe d'homologie telle que $c_1(X)d \geq 2$ et \underline{x} une configuration réelle de $c_1(X)d - 2$ points distincts. Comme au §2.1, on note $\mathbb{R}X_1, \dots, \mathbb{R}X_N$ les composantes connexes de $\mathbb{R}X$ et r_i le cardinal de $\underline{x} \cap \mathbb{R}X_i$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit $B \subset \mathbb{R}X$ une surface à bord lisse. En chaque point réel x_i de \underline{x} , on choisit une droite vectorielle T_i dans le plan tangent $T_{x_i} \mathbb{R}X$. Pour toute structure presque complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ suffisamment générique, on définit l'entier $\Gamma_r^{d,B}(J, \underline{x})$ comme la somme des nombres de courbes J -holomorphes rationnelles réelles qui réalisent la classe d'homologie d , passent par la configuration \underline{x} et qui proviennent des quatre familles suivantes :

- Les courbes tangentes au bord de B , elles sont comptées en fonction de leurs masses et de leur contact intérieur ou extérieur à B au point de tangence.
- Les courbes non-immérgées, qui sont comptées en fonction de leurs masses et de la position du point de rebroussement par rapport à B .
- Les courbes possédant une des droites T_i comme tangente, qui sont comptées en fonction de leurs masses et de la position du point x_i correspondant à T_i par rapport à B .

- Les courbes réductibles, qui sont comptées en fonction de leurs masses et d’une multiplicité qui est le nombre de points réels d’intersection entre les deux composantes irréductibles de la courbe, chacun de ces points devant être compté positivement ou négativement selon qu’il est intérieur ou extérieur à B .

Ainsi, en notant respectivement $\mathcal{T}an_B^d(J, \underline{x})$, $\mathcal{C}usp^d(J, \underline{x})$, $\mathcal{T}an^d(J, \underline{x})$ et $\mathcal{R}ed^d(J, \underline{x})$ ces quatre ensembles finis de courbes J -holomorphes, l’entier $\Gamma_r^{d,B}(J, \underline{x})$ s’écrit

$$\sum_{C \in \cup \mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x}) \cup \mathcal{T}an^d(J, \underline{x}) \cup \mathcal{C}usp^d(J, \underline{x})} (-1)^{m(C)} \langle C, B \rangle - \sum_{C \in \mathcal{R}ed^d(J, \underline{x})} (-1)^{m(C)} \text{mult}_B(C).$$

Dans cette somme, l’indice de contact $\langle C, B \rangle$ vaut -1 (resp. $+1$) si $C \in \mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x})$ et $\mathbb{R}C$ se trouve localement incluse dans (resp. en dehors de) B au voisinage du point de tangence y avec ∂B . Si $C \in \mathcal{C}usp^d(J, \underline{x})$ (resp. $C \in \mathcal{T}an^d(J, \underline{x})$), le point de rebroussement (resp. la droite T_i , $i \in I$) est unique et l’indice de contact $\langle C, B \rangle$ vaut -1 si ce point se situe en-dehors de B et $+1$ sinon. Si C est réductible, elle n’a que deux composantes irréductibles C_1, C_2 , toutes deux réelles et

$$\text{mult}_B(C) = \sum_{y \in \mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}C_2} \langle y, B \rangle,$$

où $\langle y, B \rangle$ vaut -1 lorsque y est extérieur à B et $+1$ s’il est intérieur.

Théorème 3.1 (voir [45]) *Soient (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre et $B \subset \mathbb{R}X$ une surface à bord lisse. Soient N le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ et $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ satisfaisant $c_1(X)d > 1$, $c_1(X)d \neq 4$. Soient $\underline{x} \subset X \setminus \partial B$ une configuration réelle de $c_1(X)d - 2$ points distincts et $r = (r_1, \dots, r_N)$ le N -uplet associé, supposé non nul. L’entier $\Gamma_r^{d,B}(J, \underline{x})$ est indépendant du choix de \underline{x} et du choix générique de $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$.*

Le Théorème 3.1 permet sans ambiguïté de noter $\Gamma_r^{d,B}$ cet entier. Lorsque $\sum_{i=1}^N r_i$ n’a pas la même parité que $c_1(X)d$, on pose $\Gamma_r^{d,B} = 0$. Comme au §2.1, on note alors $\Gamma^{d,B}[T]$ la fonction génératrice $\sum_{|r|=0}^{c_1(X)d-2} \Gamma_r^{d,B} T^r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$. Cette fonction est de même parité que $c_1(X)d$ et tous ses monômes ne dépendent en fait que d’une indéterminée.

Ainsi, la fonction $\Gamma^B : d \in H_2(X; \mathbb{Z}) \mapsto \Gamma^{d,B}[T] \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$ ne dépend que du quadruplet (X, ω, c_X, B) . Elle est en outre invariante par déformation de ce quadruplet au sens où si ω_t est une famille continue de formes symplectiques satisfaisant $c_X^* \omega_t = -\omega_t$ et $B_t \subset \mathbb{R}X$ une isotopie de surfaces compactes, alors cette fonction est la même pour tout (X, ω_t, c_X, B_t) .

Remarquons qu’en particulier $\Gamma_r^{d,B}(J, \underline{x})$ ne dépend pas de la position relative de \underline{x} par rapport à B , que $\Gamma_r^{d,B} = -\Gamma_r^{d, \mathbb{R}X \setminus B}$ et que le cas particulier où B est vide est admissible et fournit un invariant que l’on a préalablement introduit dans [44]. Montrer l’invariance de $\Gamma_r^{d, \emptyset}(J, \underline{x})$ se trouve être une étape importante dans la démonstration de l’invariance de $\Gamma_r^{d,B}(J, \underline{x})$.

Théorème 3.2 (voir [45]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, si B est un disque, $2\chi_{r+1}^d = \Gamma_r^{d,B} - \Gamma_r^{d, \emptyset}$. Si de plus, (X, ω, c_X) est symplectomorphe au plan projectif complexe,*

$\Gamma_r^{d,B} = -\Gamma_r^{d,\emptyset}$, tandis que si elle est symplectomorphe à la quadrique hyperboloïde de dimension deux, $\Gamma_r^{d,B} = 2\chi_{r+1}^d - \Gamma_r^{d,\emptyset}$.

Démonstration :

Soit B un disque de centre $y \in \mathbb{R}X$ et de rayon ϵ convergeant vers zéro. Les trois derniers termes définissant $\Gamma_r^{d,B}$ convergent vers $\Gamma_r^{d,\emptyset}$. Les courbes de l'ensemble $\mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x})$ convergent quant à elles vers les courbes J -holomorphes rationnelles qui passent par $\underline{x} \cup \{y\}$, chacune de ces dernières étant limite de deux éléments de $\mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x})$, d'où le premier résultat. Si ϵ converge vers l'infini et X est le plan projectif, alors les trois derniers termes définissant $\Gamma_r^{d,B}$ convergent vers $-\Gamma_r^{d,\emptyset}$ tandis que les courbes de l'ensemble $\mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x})$ convergent vers les courbes J -holomorphes rationnelles tangentes à la droite à l'infini, chacune de ces dernières étant limite de deux éléments de $\mathcal{T}an_L^d(J, \underline{x})$ de signe opposé, d'où $\Gamma_r^{d,B} = -\Gamma_r^{d,\emptyset}$. La dernière relation se montre de façon analogue. \square

Corollaire 3.3 (voir [45]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, $\chi_{r+1}^d = -\Gamma_r^{d,\emptyset} = \Gamma_r^{d,B}$ dans le cas du plan projectif complexe et $\Gamma_r^{d,B} = 2\chi_{r+1}^d$, $\Gamma_r^{d,\emptyset} = 0$ dans le cas de la quadrique hyperboloïde de dimension deux.* \square

Esquisse de la démonstration du Théorème 3.1 :

On commence par construire l'espace des modules des couples (C, J) formés d'une structure presque-complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ et d'une courbe J -holomorphe rationnelle réelle C comptée par $\Gamma_r^{d,B}$. Cet espace est une variété de Banach de régularité finie munie d'une projection Fredholm π d'indice nul sur $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. On peut sans perte de généralité supposer la configuration \underline{x} fixée une fois pour toute. Relions deux structures presque-complexes génériques par un chemin générique $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. Au dessus d'un tel chemin, l'espace des modules des couples (C, J) est une variété de dimension un. L'entier $\Gamma_r^{d,B}(\underline{x}, \gamma(t))$ est alors bien défini pour toute valeur $t \in [0, 1]$ à l'exception peut-être d'un nombre fini de valeurs $0 < t_1 < \dots < t_j < 1$. On montre alors que ces dernières valeurs ne peuvent correspondre qu'à un des événements suivants.

Concernant le premier terme intervenant dans la définition de $\Gamma_r^{d,B}(\underline{x}, \gamma(t))$.

- 1) Apparition d'un unique point triple ou d'un unique point de tangence entre deux branches d'une courbe irréductible tangente au bord de B .
- 2) Apparition d'un point double transverse d'une courbe irréductible tangente au bord de B en un point de $\underline{x}^t \cup L$.
- 3) Apparition d'un unique point de rebroussement de première espèce ordinaire sur une courbe irréductible tangente au bord de B .
- 4) Apparition d'une courbe irréductible tangente au bord de B à l'ordre trois.
- 5) Dégénérescence d'une suite de courbes tangentes au bord de B vers une courbe réductible, cette dernière étant soit tangente au bord de B ou bien ayant un point d'intersection de ses deux branches sur le bord de B .
- 6) L'intersection $\underline{x}^t \cap L$ est non vide.

Concernant les trois derniers termes intervenant dans la définition de $\Gamma_r^{d,B}(\underline{x}, \gamma(t))$.

- a) Apparition d'un des événements considérés dans [44] pour montrer l'invariance de $\Gamma_r^{d,\emptyset}$.
- b) Apparition d'une courbe non-immersée dont le point de rebroussement se situe sur le bord de B

c) Apparition d'une courbe réductible dont un point d'intersection entre les deux branches se trouve sur le bord de B .

d) L'intersection $\underline{x}^t \cap L$ est non vide.

Chacun de ces événements est étudié de façon détaillée dans [45] (ou [44] dans le cas de l'événement a), nous ne reproduisons pas cette étude ici. \square

3.1.2 Sur les 3264 coniques tangentes à cinq coniques génériques

Il est possible d'étendre les résultats du §3.1.1 à davantage de conditions de tangence avec le bord de B , au moins dans le cas de coniques. J'ai illustré ce phénomène en m'intéressant au problème ancien du comptage du nombre de coniques tangentes à cinq coniques génériques données. Le nombre de solutions complexes est 3264 comme l'a démontré de Jonquières en 1859 mais le nombre de solutions réelles dépend du choix des cinq coniques génériques. Soient B_1, \dots, B_5 cinq disques plongés dans $\mathbb{R}P^2$ de sorte que leurs bords soient transverses deux à deux, et $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. Notons Γ^B le nombre de coniques J -holomorphes réelles qui sont soit :

- irréductibles, tangentes à B_1, \dots, B_5 , et comptées positivement si elles sont tangentes intérieurement à B_i pour un nombre pair de $i \in \{1, \dots, 5\}$, négativement sinon.
- réductibles, tangentes à quatre des cinq disques B_1, \dots, B_5 , et chacune comptée en fonction de la parité du nombre de disques en lesquelles elle est tangente intérieurement et de la position de son unique point singulier par rapport au cinquième disque en lequel elle n'est pas tangente.

Ainsi, en notant respectivement $Con(J)$ et $Con_{red}(J)$ ces deux ensembles finis de coniques J -holomorphes, on obtient

$$\Gamma^B(J) = \sum_{C \in Con(J)} \langle C, B \rangle - \sum_{C \in Con_{red}(J)} \langle C, B \rangle \text{mult}_B(C) \in \mathbb{Z},$$

où lorsque $C \in Con(J)$, l'indice de contact $\langle C, B \rangle$ vaut $\prod_{i=1}^5 \langle C, B_i \rangle$; tandis que lorsque $C \in Con_{red}(J)$ et $i_1, \dots, i_4 \in \{1, \dots, 5\}$ sont les entiers tels que C soit tangent aux bords de B_{i_1}, \dots, B_{i_4} , $\langle C, B \rangle = \prod_{j=1}^4 \langle C, B_{i_j} \rangle$ et $\text{mult}_B(C) = +1$ si le point singulier de C appartient à B_{i_5} et -1 sinon.

Théorème 3.4 (voir [45]) 1) Cet entier $\Gamma^B(J)$ ne dépend pas du choix générique de la structure presque-complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ et est invariant par isotopie de $B = B_1 \cup \dots \cup B_5$.

2) Si B_1, \dots, B_5 sont cinq disques disjoints, alors $\Gamma^B = 272$. Il en est de même si B_1, \dots, B_5 sont proches de cinq droites doubles génériques.

Un disque est dit proche d'une droite double d'équation $y^2 = 0$ s'il a une équation de la forme $\{y^2 \leq \epsilon^2 x^2 - \delta\}$ pour ϵ et δ petits.



Corollaire 3.5 (voir [45]) Si C_1, \dots, C_5 sont cinq coniques dont la classe d'isotopie est donnée par la deuxième partie du Théorème 3.4, alors le nombre de coniques réelles qui leur sont tangentes est minoré par 32 indépendamment du choix de C_1, \dots, C_5 dans la classe d'isotopie.

Démonstration :

Le nombre de droites tangentes à deux coniques génériques vaut quatre, elles sont codées par les points d'intersection entre les deux coniques duales. Le nombre de coniques tangentes à quatre des cinq coniques C_1, \dots, C_5 se trouve donc majoré par $240 = 5 * 3 * 4 * 4$, de sorte que le résultat découle de la définition de Γ^B et de la deuxième partie du Théorème 3.4. \square

Démonstration du Théorème 3.4 :

La première partie se démontre comme le Théorème 3.1. Les seuls événements à considérer sont

1) L'apparition d'une conique lisse bitangente à $C_1 \cup \dots \cup C_5$ avec des points de contact d'ordre deux au plus.

2) L'apparition d'une conique lisse tangente à l'ordre trois avec une courbe C_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$, les autres tangence restant non-dégénérées.

3) L'apparition d'une conique réductible formée de deux droites réelles dont l'une est tangente à trois courbes C_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$, et l'autre aux deux restantes. Ces points de tangence sont non-dégénérés et en-dehors du point singulier de la conique réductible.

4) L'apparition d'une conique réductible tangente à quatre courbes C_{i_1}, \dots, C_{i_4} et dont le point singulier se trouve sur C_{i_5} .

5) L'apparition d'une conique réductible tangente à C_{i_1}, \dots, C_{i_4} avec un point de contact d'ordre trois.

6) L'apparition d'une conique réductible tangente à C_{i_1}, \dots, C_{i_4} avec son point singulier sur C_{i_1}, \dots, C_{i_4} .

L'étude de chacun de ces phénomènes est menée dans [45].

Si ces cinq coniques bordent cinq disques disjoints, on fait tendre les rayons de ces disques vers zéro de sorte qu'ils se contractent vers cinq points génériques y_1, \dots, y_5 . Les coniques lisses comptées par $\Gamma^B(J)$ dégénèrent sur l'unique conique passant par y_1, \dots, y_5 . Pour de petites valeurs des rayons des disques, on montre que les coniques lisses comptées par $\Gamma^B(J)$ sont au nombre de $2^5 = 32$, toutes tangentes par l'extérieur des B_j . De même, les coniques réductibles comptées par $\Gamma^B(J)$ dégénèrent sur les quinze coniques réductibles passant par quatre des cinq points y_1, \dots, y_5 . Pour de petites valeurs des rayons des disques, on montre que les coniques réductibles comptées par $\Gamma^B(J)$ sont au nombre de $16 * 15 = 240$, elles ont toutes leur singularité en-dehors des disques B_j . Par suite $\Gamma^B = 32 + 240 = 272$. Le cas des disques proches de droites doubles est analogue, voir [45]. \square

3.2 Invariants relatifs imaginaires

Soit L une sphère, un tore ou un espace projectif réel de dimension $n = 2$ ou 3 . Le fibré cotangent de L est équipé de sa forme de Liouville λ et de l'involution c_L définie par $(q, p) \in T^*L \mapsto (q, -p) \in T^*L$. Cette dernière satisfait $c_L^* \lambda = -\lambda$ de sorte que $(T^*L, d\lambda, c_L)$ est une variété symplectique réelle. Soit g une métrique à courbure constante sur L , U^*L l'ensemble des couples $(q, p) \in T^*L$ tels que $g(p, p) \leq 1$ et S^*L le bord de U^*L . La restriction de λ à S^*L est une forme de contact et l'on note R_λ le champ de Reeb associé. Le flot engendré par R_λ n'est autre que le flot géodésique. Notons \mathcal{J}_λ l'espace des structures presque-complexes positives pour $d\lambda$ et asymptotiquement cylindriques sur une structure CR de S^*L . Plus précisément, le champ radial de T^*L identifie le complémentaire de la section nulle avec la symplectisation $(\mathbb{R} \times S^*L, d(e^\rho \lambda))$ de (S^*L, λ) . On note \mathcal{J}_λ l'espace des structures presque-complexes J positives pour $d\lambda$, de classe C^l , $l \gg 1$, qui satisfont $J(\frac{\partial}{\partial \rho}) = R_\lambda$ et

préservent le noyau de λ pour $\rho \gg 1$ et qui enfin sont invariantes par translation par ρ au-delà d'un certain rang ρ_0 . Nous notons alors $\mathbb{R}\mathcal{J}_\lambda \subset \mathcal{J}_\lambda$ le sous-espace des structures presque-complexes pour lesquelles c_L est J -antiholomorphe. Ces espaces \mathcal{J}_λ et $\mathbb{R}\mathcal{J}_\lambda$ sont tous deux des variétés de Banach séparables non-vides et contractiles. Nous allons compter les courbes J -holomorphes rationnelles réelles pointées d'énergie de Hofer finie proprement immergées dans T^*L en fonction d'un signe ± 1 de façon à obtenir un invariant associé à T^*L . Rappelons que d'après le Théorème 1.2 de [17] et d'après [3], ces courbes rationnelles pointées convergent en leurs pointes vers des orbites de Reeb parcourues un nombre entier de fois, que l'on appelle multiplicité. La dimension de l'espace des modules de telles courbes dépend du nombre de pointes et des multiplicités associées. Afin d'obtenir un nombre fini de courbes, nous allons soumettre ces courbes à quelques contraintes, soit en les forçant à converger vers des orbites de Reeb prescrites, soit en les forçant à passer par des points de L ou des paires de points complexes conjugués de $T^*L \setminus L$.

Soit e_i , $i \geq 1$, la suite d'entiers partout nulle sauf au i -ème rang où elle vaut un. Soient $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i e_i$ et $\beta = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \beta_i e_i$ deux suites d'entiers positifs qui s'annulent à partir d'un certain rang. Ces deux suites codent respectivement le nombre de paires d'orbites de Reeb complexes conjuguées limites prescrites et non prescrites de nos courbes, avec leur multiplicités $i \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de pointes de nos courbes vaut donc $2v = 2 \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (\alpha_i + \beta_i)$ et nous choisissons un ensemble Γ de $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_i$ géodésiques fermées disjointes de L pour prescrire nos paires d'orbites de Reeb limites. À présent, afin de fixer nos contraintes ponctuelles, soient $r \in \mathbb{N}$ et x_1, \dots, x_r des points distincts de L . De même, soient $r_L \in \mathbb{N}$ et $\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_{r_L}, \bar{\xi}_{r_L}$ des paires distinctes de points complexes conjugués de $T^*L \setminus L$, c'est-à-dire satisfaisant $c_L(\xi_i) = \bar{\xi}_i$. Nous supposons que

$$(n-1)r + 2(n-1)r_L + 2(n-1)\#\Gamma = 2v + \epsilon(n-1) \sum_{i \in \mathbb{N}^*} i(\alpha_i + \beta_i) + n - 3, \quad (2)$$

où $\epsilon = 2$ si L est homéomorphe à une sphère et $\epsilon = 1$ si L est homéomorphe à un espace projectif réel, tandis que nous supposons

$$(n-1)r + 2(n-1)r_L = 2v + n - 3 \text{ et } \alpha = 0 \quad (3)$$

si L est homéomorphe à un tore.

Alors, lorsque la structure presque-complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\lambda$ est générique, il n'y a qu'un nombre fini de courbes J -holomorphes rationnelles réelles d'énergie de Hofer finie, proprement immergées dans T^*L et ayant $2v$ pointes qui passent par \underline{x} , par chaque paire $\{\xi_i, \bar{\xi}_i\}$ et qui convergent vers les orbites de Reeb relevant les éléments de Γ ainsi que vers β_j autres paires d'orbites, $j \in \mathbb{N}^*$, chacune avec multiplicité j ou de classe d'homologie donnée si L est un tore. En effet, si L est un tore, il y a une infinité de géodésiques fermées primitives non homologues et la dimension (3) ne dépend pas du choix des classes d'homologies de sorte qu'il y a une infinité d'espaces de modules ayant la même dimension. Pour garantir la finitude, nous imposons les classes d'homologies des orbites de Reeb limites. Notons $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)$ cet ensemble fini de courbes, la généricité de J garantit qu'elles sont toutes immergées. Si L est de dimension deux, on pose

$$F_{(r, r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J) = \sum_{C \in \mathcal{R}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)} (-1)^{m(C)} \in \mathbb{Z}.$$

Si L est de dimension trois, on l'équipe d'une structure spin. Ceci permet d'associer un état spinoriel $\text{sp}(C)$ à chaque courbe $C \in \mathcal{R}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)$ comme expliqué au §4.1 et on pose

$$F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J) = \sum_{C \in \mathcal{R}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)} \text{sp}(C) \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 3.6 (voir [48]) *Soit L une sphère, un tore ou un espace projectif réel de dimension $n = 2$ ou 3 muni d'une métrique à courbure constante. Soient α, β deux suites d'entiers positifs qui s'annulent à partir d'un certain rang. On choisit comme ci-dessus un ensemble Γ de géodésiques fermées et des ensembles $\underline{x}, \underline{\xi}$ de r et r_L points dans L et $T^*L \setminus L$ respectivement de sorte que ces nombres satisfassent (3) dans le cas du tore et (2) sinon. Lorsque $n = 3$, on suppose $r \neq 0$ et lorsque de plus $L \in \{S^3, \mathbb{R}P^3\}$, on suppose que J est invariante par le flot de Reeb pour $\rho \gg 1$. Alors, l'entier $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)$ défini ci-dessus ne dépend ni du choix des contraintes $\Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}$, ni du choix générique de la structure presque-complexe $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\lambda$.*

Esquisse de la démonstration :

Le principe de la démonstration est le même que celui utilisé dans les Théorèmes 2.1 et 4.1. On peut supposer $\Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}$ fixés et il suffit d'étudier le comportement de $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)$ au-dessus d'un chemin générique de structures presque-complexes J_t . On montre en dimension deux que cet entier $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J_t)$ est bien défini sauf peut-être en un nombre fini de valeurs qui ne peuvent correspondre qu'à l'apparition d'une courbe J_{t_i} -holomorphe qui est soit réductible, soit irréductible mais possédant un unique point singulier qui n'est pas double ordinaire. Ce dernier ne peut alors être qu'un point de rebroussement réel de première espèce, un point triple réel ordinaire ou un point de tangence de deux branches. Le seul nouveau phénomène à étudier est la possible dégénérescence vers une courbe à plusieurs étages, mais on montre que sous nos hypothèses cela n'arrive pas au-dessus d'un chemin générique. La fonction $t \mapsto F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J_t)$ est alors constante entre ces valeurs particulières $0 < t_1 < \dots < t_j < 1$ et reste inchangée au passage de ces valeurs. De même en dimension trois, l'éventuelle dégénérescence vers une courbe à plusieurs étages ne se produit pas sous nos hypothèses au-dessus d'un chemin générique, de sorte que les paramètres $0 < t_1 < \dots < t_j < 1$ pour lesquels $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J_t)$ n'est pas défini correspondent à des courbes réductibles ou non-balancées. La fonction $t \mapsto F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J_t)$ demeure inchangée au passage de ces valeurs. \square

L'entier $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta, \Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J)$ étant indépendant de $\Gamma, \underline{x}, \underline{\xi}, J$ d'après le Théorème 3.6, nous le noterons $F_{(r,r_L)}(\alpha, \beta)$. Afin d'alléger encore cette notation, nous noterons cet entier $F(\alpha, \beta)$ lorsque $r_L = 0$, puisque la valeur de r est alors définie sans ambiguïté par les calculs de dimensions (2) et (3).

Lemme 3.7 (voir [48]) *Si L est homéomorphe à une sphère de dimension deux et $r_L = 0$, on a $F(e_1, 0) = F(0, e_1) = 1$, $F(e_2, 0) = 2$, $F(0, e_2) = 8$, $F(2e_1, 0) = 2$, $F(e_1, e_1) = 4$ et $F(0, 2e_1) = 6$.*

Démonstration :

D'après la formule d'adjonction relative, les cylindres asymptotes à des orbites de Reeb simples sont plongés et deux tels cylindres s'intersectent en deux points au maximum. Par

suite, $F_{(3,0)}(0, e_1) = 1$ et $F_{(1,0)}(e_1, 0) = F_{(1,1)}(0, e_1) = 1$. De même, $F_{(1,1)}(e_2, 0) = 0$ puisqu'en faisant tendre la paire de points complexes conjugués vers l'infini les courbes devraient converger vers des courbes à deux étages non-triviales et n'ayant qu'une orbite double comme limite positive. De telles courbes à deux étages n'existent pas. Pour comparer $F_{(1,1)}(e_2, 0)$ à $F_{(3,0)}(e_2, 0)$, on procède comme au §3 de [42] en faisant tendre la paire de points complexes conjugués vers un point y de L . Il n'y a comme précédemment qu'un seul cylindre asymptote à une orbite double, passant par un point x de L et ayant un point double en y . On montre de la même manière que le Théorème 3.2 de [42] la relation $F_{(3,0)}(e_2, 0) - F_{(1,1)}(e_2, 0) = 2$, d'où l'on déduit $F_{(3,0)}(e_2, 0) = 2$. On renvoie le lecteur à [48] pour les calculs suivants tout à fait analogues. \square

Lemme 3.8 (voir [48]) *Si L est homéomorphe à un plan projectif réel et $r_L = 0$, on a $F(e_1, 0) = F(0, e_1) = F(e_2, 0) = F(2e_1, 0) = F(e_1, e_1) = F(0, 2e_1) = 1$ et $F(0, e_2) = 4$.*

Démonstration :

D'après la formule d'adjonction relative, les cylindres asymptotes à des orbites de Reeb simples sont plongés et deux tels cylindres s'intersectent en un point au maximum. Par suite, $F_{(2,0)}(0, e_1) = F_{(0,0)}(e_1, 0) = 1$. De même, des cylindres asymptotes à des orbites de Reeb doubles ou des sphères ayant quatre pointes asymptotes à des orbites de Reeb simples s'intersectent en quatre points au maximum, de sorte que $F_{(1,0)}(e_2, 0) = F_{(1,0)}(2e_1, 0) = F_{(3,0)}(e_1, e_1) = F_{(5,0)}(0, 2e_1) = 1$. On renvoie le lecteur à [48] pour le calcul de $F(0, e_2)$. \square

Lemme 3.9 (voir [48]) *Si L est homéomorphe à un plan projectif réel et $r_L = 0$, on a $F(e_3, 0) = 2$, $F(0, e_3) = 12$, $F(e_1 + e_2, 0) = 2$, $F(e_1, e_2) = 8$, $F(e_2, e_1) = 4$, $F(0, e_1 + e_2) = 24$, $F(3e_1, 0) = 2$, $F(2e_1, e_1) = 4$, $F(e_1, 2e_1) = 6$ et $F(0, 3e_1) = 8$.*

Démonstration :

On procède comme dans la démonstration du Lemme 3.7. \square

4 Invariants en dimension six

Nous exposons dans ce paragraphe les résultats analogues à ceux présentés au §2 que l'on a pu établir en dimension six.

4.1 Définition des invariants dans les variétés algébriques réelles convexes

Rappelons qu'une variété projective lisse est dite convexe lorsque le groupe $H^1(\mathbb{C}P^1; u^*TX)$ s'annule pour tout morphisme $u : \mathbb{C}P^1 \rightarrow X$. Les seuls exemples que je connaisse sont les espaces homogènes projectifs, citons les produits d'espaces projectifs, la quadrique de $\mathbb{C}P^4$ ou encore la variété des drapeaux de \mathbb{C}^3 . Il est à nouveau possible de définir un invariant en comptant algébriquement le nombre de courbes rationnelles réelles qui réalisent une classe d'homologie d donnée et passent par une configuration réelle de points \underline{x} de cardinal $\frac{1}{2}c_1(X)d$, où $c_1(X)$ désigne la première classe de Chern de la variété et $c_1(X)d$ est supposé pair. Toutefois, le signe ± 1 en fonction duquel il convient de compter les courbes rationnelles réelles est plus délicat à définir. Le lieu réel $\mathbb{R}X = \text{fixe}(c_X)$ de X est une variété lisse de dimension réelle trois que l'on suppose orientable pour simplifier. Munissons-la d'une orientation ainsi que d'une métrique riemannienne auxiliaire. Son $SO_3(\mathbb{R})$ -fibré principal des repères ortho-normés directs s'étend alors en un $Spin_3$ -fibré principal. En effet, l'obstruction à l'existence

d'une telle extension est donnée en général par la classe caractéristique $w_2(\mathbb{R}X)$ et cette obstruction s'annule en dimension trois comme il découle de la formule de Wu. Lorsque la configuration réelle de points est suffisamment générique et possède au moins un point réel, d'une part les courbes rationnelles réelles qui passent par \underline{x} et réalisent d sont toutes immergées (même lisses en général) et de partie réelle non vide, et d'autre part elle sont équilibrées. Ce dernier point signifie que le fibré normal de ces courbes se décompose sur \mathbb{C} comme la somme directe de deux fibrés en droite isomorphes L et M , fibrés qui de plus peuvent être choisis réels. Notons $\mathcal{R}_d(\underline{x})$ cet ensemble fini de courbes rationnelles réelles. Chaque lieu réel de ces courbes fournit donc un nœud immergé dans la variété de dimension trois $\mathbb{R}X$, et ce nœud est de plus canoniquement équipé d'un repère mobile ou plutôt d'axes mobiles donnés par la tangente au nœud et les lieux réels des fibrés en droites L et M (en fait, seule la classe d'homotopie de ces axes mobiles est canoniquement définie, puisque la décomposition du fibré normal en somme $L \oplus M$ n'est pas uniquement définie, mais c'est amplement suffisant pour nos besoins). Lorsque les lieux réels de L et M sont orientables, c'est-à-dire lorsque ces fibrés sont de degré pair, ces axes mobiles peuvent être enrichis de repères orthonormés. Ainsi, les nœuds définis par les courbes rationnelles réelles sont tous équipés de repères orthonormés mobiles qui fournissent des lacets dans le $SO_3(\mathbb{R})$ -fibré principal des repères orthonormés, lacets qui relèvent les nœuds de $\mathbb{R}X$. Vient alors l'alternative suivante pour chaque lacet : soit ce lacet du $SO_3(\mathbb{R})$ -fibré principal des repères se relève en un lacet du $Spin_3$ -fibré principal donné par la structure $Spin \mathfrak{s}$, soit non. Ceci permet de définir l'état spinoriel $sp(C)$ de chaque courbe rationnelle réelle C comme valant $+1$ dans le premier cas, et -1 dans le second. Lorsque les lieux réels de L et M ne sont pas orientables, on modifie ces axes mobiles à l'aide d'un demi-tour à droite donné par l'orientation de $\mathbb{R}X$, ce qui permet de se ramener au cas précédent et de définir l'état spinoriel également dans ce cas. L'entier $\chi_r^{d,s}(\underline{x})$ n'est alors autre que le nombre de courbes rationnelles réelles qui réalisent la classe d'homologie d et passent par \underline{x} , ces courbes étant comptées en fonction de leur état spinoriel, de sorte que

$$\chi_r^{d,s}(\underline{x}) = \sum_{C \in \mathcal{R}_d(\underline{x})} sp(C) \in \mathbb{Z}.$$

On a noté $r = (r_1, \dots, r_N)$ le N -uplet associé à \underline{x} ; c'est-à-dire que N désigne le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ et en notant $(\mathbb{R}X)_1, \dots, (\mathbb{R}X)_N$ ces composantes, $r_i = \#(\underline{x} \cap (\mathbb{R}X)_i)$.

Théorème 4.1 (voir [43]) *Soient (X, c_X) une variété algébrique réelle convexe lisse de dimension trois et \mathfrak{s} une structure $Spin_3$ sur son lieu réel $\mathbb{R}X$ supposé orientable. Soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ telle que $c_1(X)d$ soit pair et différent de quatre et soit $k_d = \frac{1}{2}c_1(X)d \in \mathbb{N}^*$. Soient $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k_d})$ une configuration réelle de k_d points distinct dont au moins un réel et r le N -uplet associé. L'entier $\chi_r^{d,s}(\underline{x})$ ne dépend alors pas du choix générique de \underline{x} .*

Ce résultat est valable aussi pour les variétés dont le lieu réel n'est pas orientable, moyennant le choix d'une structure Pin_3^- sur le lieu réel; l'invariant s'annule alors lorsque k_d est pair, voir [43].

Ce Théorème 4.1 permet sans ambiguïté de noter cet entier $\chi_r^{d,s}$. Lorsque $\sum_{i=1}^N r_i$ n'a pas la même parité que $k_d = \frac{1}{2}c_1(X)d$, on pose $\chi_r^{d,s} = 0$. On note alors $\chi^{d,s}[T]$ la fonction génératrice $\sum_{|r|=0}^{k_d} \chi_r^{d,s} T^r \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_N]$. Cette fonction est de même parité que $\frac{1}{2}c_1(X)d$ et tous ses monômes ne dépendent en fait que d'une indéterminée.

Ainsi, la fonction $\chi^s : d \in H_2(X; \mathbb{Z}) \mapsto \chi^{d,s}(T) \in \mathbb{Z}[T]$ est invariante par isomorphisme de la variété algébrique réelle convexe lisse de dimension trois (X, c_X) . On en déduit à nouveau les bornes inférieures suivantes en géométrie énumérative réelle.

Corollaire 4.2 (voir [43]) *Sous les hypothèses du Théorème 4.1, notons $R_d(\underline{x})$ le nombre de courbe rationnelles réelles connexes homologues à d qui passent par \underline{x} et N_d l'invariant de Gromov-Witten de genre zéro associé. Alors, $|\chi_r^{d,s}| \leq R_d(\underline{x}) \leq N_d$. \square*

Esquisse de la démonstration du Théorème 4.1 :

On considère l'espace des modules $\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{0,k_d}^d(X)$ des applications stables réelles de genre nul avec k_d points marqués dont r réel. Cet espace vient avec un morphisme d'évaluation $ev_{k_d}^d$ sur l'espace des configurations de points noté $\mathbb{R}_\tau X^{k_d}$. Soient $\underline{x}^0, \underline{x}^1 \in \mathbb{R}_\tau X^{k_d}$ deux valeurs régulières de ce morphisme dans la même composante connexe de $\mathbb{R}_\tau X^{k_d}$, en dehors de l'image des courbes réductibles. Il s'agit de montrer que $\chi_r^{d,s}(\underline{x}^0) = \chi_r^{d,s}(\underline{x}^1)$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_\tau X^{k_d}$ un chemin générique reliant \underline{x}^0 à \underline{x}^1 et $\mathbb{R}\mathcal{M}_\gamma$ le produit fibré $\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{0,k_d}^d(X) \times_\gamma [0, 1]$. C'est une variété de dimension un munie d'une projection $\mathbb{R}\pi_\gamma$ sur $[0, 1]$. L'entier $\chi_r^{d,s}(\gamma(t))$ est bien défini en tous $t \in [0, 1]$ sauf un nombre fini $0 < t_0 < \dots < t_j < 1$ qui ne peuvent correspondre qu'à des valeurs critiques de $\mathbb{R}\pi_\gamma$ ou bien à la traversée de l'image des courbes réductibles par l'application d'évaluation. On montre que les points critiques de $\mathbb{R}\pi_\gamma$ sont des courbes immergées irréductibles réelles (u, C, z) ayant un fibré normal isomorphe à $\mathcal{O}_C(k_d - 2) \oplus \mathcal{O}_C(k_d)$, de sorte qu'elle ne sont pas équilibrées. Soit (u, C, z) un tel point critique. Son voisinage dans $\mathbb{R}\mathcal{M}_\gamma$ est isomorphe à un intervalle $] - \epsilon, \epsilon[$ que l'on complexifie en un disque de rayon ϵ dans l'espace des applications stables $\overline{\mathcal{M}}_{0,k_d}^d(X)$. La famille de courbes codée par ce disque fournit une déformation triviale réelle $\Delta(\epsilon) \times \mathbb{C}P^1$, mais la famille de leur fibrés normaux fournit une déformation non-triviale sur le disque, triviale sur le disque pointé. Lorsque le paramètre $\lambda \in] - \epsilon, \epsilon[$, le fibré normal à la courbe correspondante, isomorphe à $\mathcal{O}_C(k_d - 1) \oplus \mathcal{O}_C(k_d - 1)$, dégénère en $\mathcal{O}_C(k_d - 2) \oplus \mathcal{O}_C(k_d)$ en zéro puis redevient isomorphe à $\mathcal{O}_C(k_d - 1) \oplus \mathcal{O}_C(k_d - 1)$. On montre que si le point critique correspondant de l'évaluation est non-dégénéré, il se produit au cours de cette déformation qu'une section réelle de ce fibré normal engendrant un fibré en droite de degré $k_d - 1$ traverse la section nulle en $\lambda = 0$. En ce paramètre particulier, elle admet donc un zéro supplémentaire et engendre le fibré de degré k_d . Ainsi, le repère mobile que définit cette section après le passage de l'origine se déduit de celui avant le passage par un tour complet, le générateur de $\pi_1(SO_3(\mathbb{R}))$. L'état spinoriel de ces courbes change donc au cours de cette traversée. Il s'ensuit que les deux courbes rationnelles réelles qui apparaissent ou disparaissent lorsque t traverse la valeur critique non-dégénérée de $\mathbb{R}\pi_\gamma$ sont d'états spinoriels opposés de sorte que leur contribution s'annule. On montre qu'il en est de même pour tout point critique d'indice pair alors qu'en des points critiques d'indice impair l'état spinoriel reste inchangé, simplement parce-que notre section touche la section nulle en $\lambda = 0$, mais sans la traverser. On montre ensuite que les courbes réductibles de $\mathbb{R}\mathcal{M}_\gamma$ sont des points réguliers de sorte qu'il suffit de montrer que l'état spinoriel des courbes reste inchangé au passage de ces courbes réductibles. On renvoie le lecteur à [43] pour cette vérification. \square

Finissons ce paragraphe par une interprétation topologique de nos résultats. Les singularités de l'espace $\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X)$ sont de codimension au moins deux, de sorte que cet espace possède une première classe de Stiefel-Whitney. Étant donné $D \in H_{3k_d-1}(\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on note D^\vee son image sous le morphisme $H_{3k_d-1}(\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Proposition 4.3 (voir [41]) *La première classe de Stiefel-Whitney de toute composante $\mathbb{R}\mathcal{M}^*$ de $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{k_d}^d(X)$ qui contient une courbe équilibrée s'écrit*

$$w_1(\mathbb{R}\mathcal{M}^*) = (\mathbb{R}_\tau ev^d)^* w_1(\mathbb{R}_\tau X^{k_d}) + \sum_{D \subset \text{Red}'} \epsilon(D) D^\vee \in H^1(\mathbb{R}\mathcal{M}^*; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

où $\epsilon(D) \in \{0, 1\}$ et lorsque $\epsilon(D) = 1$, la composante irréductible D de Red se trouve contractée par l'application d'évaluation $\mathbb{R}_\tau ev^d$. \square

On a noté ici Red' la réunion du diviseur des courbes réductibles Red et de l'éventuel diviseur des courbes non-équilibrées (u, C, \underline{z}) telles que $\dim H^1(C; N_u \otimes \mathcal{O}_C(-\underline{z})) \geq 2$, si un tel diviseur existe. On note Red_1 la réunion des composantes irréductibles D de Red' pour lesquelles $\epsilon(D) = 1$. Équipons $\mathbb{R}_\tau X^{k_d}$ d'un système de coefficients tordus entiers \mathcal{Z} et notons $[\mathbb{R}_\tau X^{k_d}] \in H_{3k_d}(\mathbb{R}_\tau X^{k_d}; \mathcal{Z})$ sa classe fondamentale. Notons \mathcal{Z}^* le système de coefficients locaux induit sur $\mathbb{R}\mathcal{M}^*$, tiré en arrière de \mathcal{Z} par $\mathbb{R}_\tau ev^d$.

Proposition 4.4 (voir [41]) *Sous les hypothèses de la Proposition 4.3, il existe une unique classe fondamentale $[\mathbb{R}\mathcal{M}^*] \in H_{3k_d}(\mathbb{R}\mathcal{M}^*, \text{Red}_1; \mathcal{Z}^*)$ telle qu'en toute courbe équilibrée $(u, C, \underline{z}) \in \mathbb{R}\mathcal{M}^*$, le morphisme*

$$(\mathbb{R}_\tau ev^d)_* : H_{3k_d}(\mathbb{R}\mathcal{M}^*, \mathbb{R}\mathcal{M}^* \setminus \{(u, C, \underline{z})\}; \mathcal{Z}^*) \rightarrow H_{3k_d}(\mathbb{R}_\tau X^{k_d}, \mathbb{R}_\tau X^{k_d} \setminus \{u(\underline{z})\}; \mathcal{Z})$$

envoie $[\mathbb{R}\mathcal{M}^*]$ sur $sp(u, C, \underline{z})[\mathbb{R}_\tau X^{k_d}]$. \square

Comme $\mathbb{R}_\tau ev^d(\text{Red}_1)$ est de codimension deux, le groupe $H_{3k_d}(\mathbb{R}_\tau X^{k_d}, \mathbb{R}_\tau ev^d(\text{Red}_1); \mathcal{Z})$ est cyclique, engendré par $[\mathbb{R}_\tau X^{k_d}]$. L'entier $\chi_r^{d,s}$ n'est autre que celui défini par la relation $(\mathbb{R}_\tau ev^d)_* [\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X)] = \chi_r^{d,s} [\mathbb{R}_\tau X^{k_d}]$, où la classe fondamentale $[\mathbb{R}_\tau \overline{\mathcal{M}}_{k_d}^d(X)]$ est donnée par la Proposition 4.4.

4.2 Extension aux variétés symplectiques réelles positives

L'extension des résultats du §4.1 aux variétés symplectiques n'est pas immédiate, en partie parce-que le théorème de Grothendieck [15] selon lequel les fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann sont entièrement décomposables n'est plus valable pour les fibrés normaux des courbes pseudo-holomorphes. Ces derniers sont des fibrés vectoriels complexes munis d'un opérateur de Cauchy-Riemann qui n'est que \mathbb{R} -linéaire et non \mathbb{C} -linéaire comme dans le cas de fibrés holomorphes. Ces premiers sont des perturbations d'ordre zéro de ces derniers par des opérateurs \mathbb{C} -antilinéaires et sont parfois appelés « opérateurs de Cauchy-Riemann généralisés ». J'ai étendu dans [41] la notion d'état spinoriel pour un opérateur de Cauchy-Riemann généralisé surjectif.

La stratégie est la suivante. L'espace des opérateurs de Cauchy-Riemann généralisés réels sur un fibré vectoriel complexe réel donné est un espace de Banach affine, il contient les opérateurs de Cauchy-Riemann \mathbb{C} -linéaires comme sous-espace de Banach. Or chaque opérateur de Cauchy-Riemann surjectif définit une structure de fibré vectoriel holomorphe équilibré et possède donc un état spinoriel d'après les résultats du §4.1. Étant donné un opérateur de Cauchy-Riemann généralisé surjectif, on le relie à opérateur de Cauchy-Riemann surjectif par un chemin générique et on définit son état spinoriel comme celui de l'opérateur de Cauchy-Riemann si le chemin traverse un nombre pair de fois le mur des opérateurs non-surjectifs et son opposé sinon.

Soit alors (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle positive de dimension six, c'est-à-dire dont la première classe de Chern est un multiple strictement positif de la forme symplectique ω . On suppose à nouveau pour simplifier le lieu réel de cette variété orientable et on l'équipe d'une structure spin \mathfrak{s} . Soit, comme au §4.1, $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ telle que $(c_X)_*d = -d$, $c_1(X)d$ soit pair et strictement plus grand que deux. Soient $k_d = \frac{1}{2}c_1(X)d$ et $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k_d}) \in X^{k_d}$ une configuration réelle de k_d points distincts, dont au moins un réel. Lorsque $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ est suffisamment générique, il n'y a qu'un nombre fini de courbes J -holomorphes rationnelles réelles connexes homologues à d et contenant \underline{x} . Ces courbes sont toutes irréductibles, lisses et de partie réelle non-vide. On note $\mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$ cet ensemble fini de courbes. Le fibré normal de chacune de ces courbes $C \in \mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$ est équipé d'un opérateur de Cauchy-Riemann généralisé surjectif D_C qui possède donc un état spinoriel $sp(C)$ d'après ce qui précède. On pose

$$\chi_r^{d, \mathfrak{s}}(\underline{x}, J) = \sum_{C \in \mathcal{R}_d(\underline{x}, J)} sp(C) \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 4.5 (voir [41]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle positive de dimension six, de lieu réel orientable muni d'une structure spin \mathfrak{s} . Soit $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ telle que $(c_X)_*d = -d$, $c_1(X)d$ est pair et strictement plus grand que deux. Soient $k_d = \frac{1}{2}c_1(X)d$ et \underline{x} une configuration réelle de k_d points distincts, dont au moins un réel. et $r = (r_1, \dots, r_N)$ le N -uplet associé. Alors, l'entier $\chi_r^{d, \mathfrak{s}}(\underline{x}, J)$ ne dépend ni du choix de \underline{x} , ni du choix générique de $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$.*

Remarquons que ce résultat s'applique plus généralement aux variétés symplectiques réelles « fortement semipositives », comme établi dans [41]. Il permet de noter sans ambiguïté l'invariant $\chi_r^{d, \mathfrak{s}}$, c'est un invariant par déformation fortement semipositive de (X, ω, c_X) . On en déduit les bornes inférieures suivantes.

Corollaire 4.6 (voir [41]) *Sous les hypothèses du Théorème 4.5, $|\chi_r^{d, \mathfrak{s}}| \leq \#\mathcal{R}_d(\underline{x}, J)$, pour tout choix de configuration réelle $\underline{x} \in X^{k_d}$ telle que $\underline{x} \cap \mathbb{R}X = r$, et tout choix générique de $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$. \square*

Esquisse de la démonstration du Théorème 4.5 :

Cette démonstration s'appuie sur celle du Théorème 4.1. L'invariance de $\chi_r^{d, \mathfrak{s}}(\gamma(t))$ au passage d'un point critique est ici tautologique. Pour montrer l'invariance lorsque le chemin γ traverse le mur image des courbes réductibles, on montre que cette invariance ne dépend pas du choix générique du point du mur par lequel on traverse ce dernier, puis on montre que l'on peut sans perte de généralité choisir ce point (C, J) de sorte que la structure presque-complexe J soit intégrable au voisinage de la courbe J -holomorphe réductible C . Les arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 4.1 étant locaux, ils s'appliquent ici et permettent d'en déduire l'invariance de $\chi_r^{d, \mathfrak{s}}(\underline{x}, J)$. \square

4.3 Optimalité, congruences et calculs dans le cas de l'ellipsoïde de dimension trois

Théorème 4.7 (voir [48]) *Soient (X, c_X) la quadrique ellipsoïde de dimension trois et $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ satisfaisant $c_1(X)d = 2 \pmod{4}$. L'invariant χ_1^d est alors négatif et les bornes inférieures apparues dans le Corollaire 4.2 sont optimales, atteintes lorsque les conditions d'incidence non réelles sont choisies suffisamment proches d'une section hyperplane réelle disjointe du lieu réel $\mathbb{R}X$.*

Remarque 4.8 La condition $c_1(X)d = 2 \pmod{4}$ garantit la parité de l'entier k_d de sorte que l'on peut effectivement choisir un point réel. Lorsque $c_1(X)d = 0 \pmod{4}$, et $r = 0$, l'invariant χ_r^d n'est pas défini. Toutefois, on a montré dans ce cas là qu'il existe une structure presque-complexe générique $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ et k_d points complexes conjugués pour lesquels aucune courbe J -holomorphe rationnelle réelle homologue à d contient ces k_d points, voir le Théorème 5.2.

Théorème 4.9 (voir [48]) *Soient (X, c_X) la quadrique ellipsoïde de dimension trois et d un multiple positif, disons $\delta > 0$, d'une section hyperplane réelle. Lorsque $6r + 1 \leq 3\delta$, la puissance $2^{\frac{3}{4}(\delta-2r)}$ divise χ_r^d .*

Démonstration des Théorèmes 4.7 et 4.9 :

On suit la même stratégie qu'au §2.1 en équipant le lieu réel d'une métrique à courbure constante et en allongeant le cou de la structure complexe jusqu'à briser la variété en deux morceaux. Les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d se brisent en courbes à deux étages dont on montre qu'elles doivent être rigides, satisfaisant leurs conditions d'incidence. Soit C une composante irréductible réelle d'une telle courbe plongée dans T^*L et v le nombre de paires de ses pointes complexes conjuguées. À chacune de ces paires de pointes est associé un entier qui correspond au nombre de fois que l'orbite de Reeb fermée limite parcourt l'orbite simple sous-jacente, on note k la somme de ces entiers. On montre alors que l'indice d'une telle courbe C , c'est-à-dire la dimension attendue de son espace de déformations, vaut $4k + 2v$. Lorsque $r = 1$, la seule courbe réelle rigide pouvant apparaître est un cylindre réel sur une orbite de Reeb simple, de sorte que $k = v = 1$ et encore faut-il que la position de cette orbite soit prescrite par la courbe située dans $X \setminus L$. L'état spinoriel de la courbe à deux étage ne dépend que de ce cylindre, il se calcule par perturbation du point réel. C'est par suite le même état spinoriel que celui d'une conique obtenue comme section plane réelle de (X, c_X) . Ce dernier vaut -1 comme on le vérifie en déformant l'équateur vers un parallèle proche d'un pôle de L . Le Théorème 4.7 en découle.

On montre de la même manière qu'aucune courbe J -holomorphe d'énergie de Hofer finie de T^*L peut être rigidifiée simplement en prescrivant ses orbites de Reeb limites, cela suit du calcul de la dimension de leurs espaces de modules. Par suite, T^*L ne contient qu'une seule composante C_0 de chaque courbe à deux étages, laquelle est réelle. Les composantes C_1, \dots, C_j de $X \setminus L$ sont toutes connectées à cette composante. Notons r_1, \dots, r_j le nombre de paires de points complexes conjugués de \underline{x} contenues par C_1, \dots, C_j . Il y a 2^{r_i-1} partitions d'un ensemble de r_i points complexes conjugués en deux ensembles complexes conjugués, soit ici 2^{r_i-1} partitions au total. Une fois attribués à chaque courbe C_s l'ensemble de points qu'elle doit interpoler, certaines de ces courbes sont rigides, d'autres conservent deux ou quatre degrés de liberté. Notons j^- le nombre de telles courbes rigides, j_1^+ (resp. j_2^+) le nombre de celles qui conservent deux (resp. quatre) degrés de liberté. D'après ce qui précède, la courbe C_0 , avec ses $j^- + j_1^+$ paires d'asymptotes prescrites et ses r points réels à interpoler, est rigide. La dimension $4k_0 + 2v_0$ vaut donc en particulier $2r + 4j^- + 2j_1^+$. Par conséquent, les j_2^+ paires de courbes non-rigides précédentes héritent d'une contrainte supplémentaire, elles doivent converger en une paire de pointes complexes conjuguées vers une paire prescrite d'orbites de Reeb limites de la courbe C_0 . Il y a deux bijections possibles entre une telle paire d'orbites de Reeb et une telle paire de courbes non-rigides, soit $2^{j_2^+}$ bijections au total. Ainsi, le nombre de courbes à deux étages ayant une combinatoire donnée par A_C est divisible par $2^{r_i - j^- - j_1^+}$. Or d'après le théorème de recollement en théorie symplectique des champs [3] et

le Théorème 4.5, la contribution à l'invariant χ_r^d d'une courbe à deux étages ne dépend que de sa combinatoire, de sorte que $2^{r_X - j^- - j_1^+}$ divise χ_r^d . L'équation $2r + 4j^- + 2j_1^+ = 4k_0 + 2v_0$ impose l'inégalité $r \geq k_{s_0}$. On en déduit $j^- + j_1^+ \leq v_0 \leq r$ de sorte que $2^{r_X - r}$ divise χ_r^d . Or par hypothèse, $2r + 4r_X = 3\delta$ puisque la première classe de Chern de la quadrique de dimension trois est Poincaré duale au triple de la section hyperplane. Le Théorème 4.9 en découle. \square

Soient r, r_X et d trois entiers naturels satisfaisant la relation $2r + 4r_X = 3d$, laquelle impose que d soit pair.

Définition 4.10 *Un arbre trois-sphérique est un arbre connexe fini dont toutes les arêtes sont étiquetées par des entiers strictement positifs. De plus, un tel arbre possède une racine s_0 et tous les sommets qui lui sont adjacents sont monovalents.*

En particulier, la distance maximale d'un sommet à s_0 vaut un. On note \mathcal{C}_r l'ensemble des arbres trois-sphériques qui satisfont

$$4 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) - 2v(s_0) \leq 2r \leq 4 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) + 2v(s_0) \text{ et } r = v(s_0) \pmod{2},$$

où $v(s)$ désigne la valence d'un sommet s , $\mathcal{A}(s)$ l'ensemble des arêtes adjacentes à s et $k(a)$ désigne la multiplicité de l'arête a . Notons également k_s la somme des multiplicités des arêtes adjacentes au sommet s et k la multiplicité totale de toutes les arêtes de l'arbre. On pose $r_L(s_0) = \frac{1}{4}(4 \sum_{a \in \mathcal{A}(s_0)} k(a) + 2v(s_0) - 2r)$, de sorte que $0 \leq r_L(s_0) \leq v(s_0)$. Enfin, on note S_1 l'ensemble des sommets adjacents à s_0 .

Définition 4.11 *Un arbre trois-sphérique décoré est un arbre trois-sphérique $A \in \mathcal{C}_r$ équipé d'une partition $S_1^+ \sqcup S_1^-$ de l'ensemble des sommets adjacents à s_0 telle que $\#S_1^- = r_L(s_0)$ et $\#S_1^+ = v(s_0) - r_L(s_0)$. Cet arbre est de plus équipé des fonctions :*

- $f_A : S_1 \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, r_X\})$ satisfaisant $f_A(s) \cap f_A(s') = \emptyset$ dès que $s \neq s'$ et $\cup_{s \in S_1} f_A(s) = \{1, \dots, r_X\}$.
- $g_A : S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $2k + 2 \sum_{s \in S_1} g_A(s) = d$ et pour tout $s \in S_1^+$ (resp. $s \in S_1^-$), $3g_A(s) + k_s + 1 = 2\#f_A(s) + 2$ (resp. $3g_A(s) + k_s + 1 = 2\#f_A(s)$).

On note \mathcal{C}_r^d l'ensemble des arbres trois-sphériques décorés, c'est un ensemble fini. Soit $A \in \mathcal{C}_r^d$, on pose $m_1^+(A)$ le nombre d'injections $\phi : \{s \in S_1^+ \mid f_A(s) \neq \emptyset\} \rightarrow \mathcal{A}^+(s_0)$ satisfaisant $k(\phi(s)) = k(ss_0)$ pour tous les sommets $s \in S_1^+$. On pose alors

$$\text{mult}(A) = 2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1^-} \max(\#f_A(s) - 1, 0)} m_1^+(A) \prod_a k(a),$$

c'est la *multiplicité* de l'arbre trois-sphérique $A \in \mathcal{C}_r^d$.

Soit Y la variété réglée $P(\mathcal{O}_Q(1, 1) \oplus \mathcal{O}_Q)$ sur la quadrique de dimension deux Q et f la classe d'une fibre de Y . Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{N}$ et α, β des suites d'entiers positifs, on note $N_3^{(a,b)+cf}(\alpha, \beta)$ le nombre de courbes rationnelles de Y , homologues à $(a, b) + cf$, ayant $\alpha_i + \beta_i$ points de tangence d'ordre i avec la section exceptionnelle $P(\mathcal{O}_Q)$ de Y parmi lesquels α_i sont prescrits et qui passent par le nombre adéquat de points fixés.

Théorème 4.12 (voir [48]) Soient (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe à la quadrique ellipsoïde de dimension trois et $r, r_X, d \in \mathbb{N}$ satisfaisant la relation $2r + 4r_X = 3d$. Alors,

$$\chi_r^d = \sum_{A \in \mathcal{C}_r^d} \text{mult}(A) F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1^-} \sum_{a+b=g_A(s)} N_3^{(a,b)+k_s f}(0, e_{k_s}) \prod_{s \in S_1^+} \sum_{a+b=g_A(s)} N_3^{(a,b)+k_s f}(e_{k_s}, 0),$$

où $(\alpha_A^-)_i$ (resp. $(\beta_A^+)_i$) vaut le nombre d'arêtes de multiplicité i reliant S_1^- (resp. S_1^+) à s_0 et $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$ désigne l'invariant défini dans le fibré cotangent de la sphère de dimension trois au §3.2.

Démonstration :

On suit la stratégie qu'au §2.1 en allongeant le cou d'une structure presque complexe générique jusqu'à briser la variété en deux morceaux T^*S^3 et $X \setminus S^3$. Les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d se brisent en courbes à deux étages interpolant r points de S^3 et r_X paires de points complexes conjugués de $X \setminus S^3$. Il est apparu au cours de la démonstration du Théorème 4.9 que ces courbes à deux étages sont codées par les arbres trois-sphériques décorés $A \in \mathcal{C}_r^d$. Il s'agit donc de dénombrer les courbes à deux étages qui sont codées par un arbre donné $A \in \mathcal{C}_r^d$, puis de dénombrer les courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégénèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le nombre de façons de répartir les points complexes conjugués parmi les composantes de la courbe à deux étages qui se trouvent dans $X \setminus S^3$ a été calculé dans la démonstration du Théorème 4.9 et vaut $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1^-} \max(\#f_A(s) - 1, 0)}$. Les composantes codées par S_1^- sont rigides avec leurs conditions d'incidence, il y en a $\prod_{s \in S_1^-} \sum_{a+b=g_A(s)} N_3^{(a,b)+k_s f}(0, k_s)$. Le nombre de courbes réelles codées par s_0 satisfaisant nos conditions d'incidence et comptées avec signe vaut $F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+)$. Il y a alors $m_1^+(A)$ façons de choisir la manière de connecter les courbes codées par S_1^+ aux orbites de Reeb restées libres de la courbe codée par s_0 . Ceci fournit $2^{\sum_{s \in S_1^+} \#f_A(s) + \sum_{s \in S_1^-} \max(\#f_A(s) - 1, 0)} m_1^+(A) F_{(r,0)}(\alpha_A^-, \beta_A^+) \prod_{s \in S_1^-} \sum_{a+b=g_A(s)} N_3^{(a,b)+k_s f}(0, k_s) \prod_{s \in S_1^+} \sum_{a+b=g_A(s)} N_3^{(a,b)+k_s f}(k_s, 0)$ courbes codées par un arbre donné $A \in \mathcal{C}_r^d$. Or, d'après le théorème de recollement de théorie symplectique des champs [3], il y a $\prod_a k(a)$ courbes J -holomorphes rationnelles réelles comptées par χ_r^d qui dégénèrent sur une courbe à deux étages donnée. Le résultat en découle. \square

Corollaire 4.13 (voir [48]) Soit (X, ω, c_X) une variété symplectomorphe à la quadrique ellipsoïde de dimension trois. Alors, $\chi_1^2 = -1$, $\chi_1^6 = 0$ et $\chi_1^{10} = -896$.

Démonstration du Corollaire 4.13 :

Il n'y a qu'une seule section plane de X qui passe par trois points. De plus, l'état spinoriel de cette conique vaut -1 , de sorte que $\chi_1^2 = -1$. En effet, l'état spinoriel d'une conique dans une quadrique de dimension deux vaut -1 et le fibré normal d'une section hyperplane réelle de X est trivial en restriction à sa partie réelle. L'annulation de χ_1^6 tient au fait qu'il n'y a pas de courbe rationnelle de bidegré (a, b) qui passe par quatre points dans la quadrique de dimension deux. Enfin, l'ensemble \mathcal{C}_1^{10} ne contient qu'un seul arbre qui n'a que deux sommets, est de multiplicité 2^6 , pour lequel S_1^+ est vide et $F(\alpha_A^-, \beta_A^+) = -1$ d'après ce qui précède. Par sept point de la quadrique Q de dimension deux, il passe douze courbes rationnelles de bidegré $(2, 2)$, une courbe de bidegré $(3, 1)$ et une de bidegré $(1, 3)$. La restriction du réglage $Y \rightarrow Q$ à ces courbes est isomorphe à la surface réglée rationnelle de degré quatre Σ_4 . Par sept points

de Σ_4 , il ne passe qu'une seule courbe rationnelle homologue à $e + f$. On en déduit que $N_3^{(3,1)+f}(0, e_1) = N_3^{(1,3)+f}(0, e_1) = 1$ et $N_3^{(2,2)+f}(0, e_1) = 12$. D'où $\chi_1^{10} = -896$. \square

5 Sur la présence et l'absence de membranes J -holomorphes

5.1 Absence de membranes J -holomorphes

Soit C une membrane J -holomorphe à bord dans une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique fermée (X, ω) . Notons χ la caractéristique d'Euler de cette membrane, $d \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$ sa classe d'homologie relative et $\mu_{TX} \in H^2(X, L; \mathbb{Z})$ la classe de Maslov de la paire (X, L) . La dimension attendue de l'espace des déformations de C s'écrit $\langle \mu_{TX}, d \rangle + (n - 3)\chi$. Cette dimension chute lorsque l'on impose à C des contraintes supplémentaires. Si l'on impose par exemple à cette membrane de rencontrer p cycles de codimensions $2 + q_1, \dots, 2 + q_p$, cette dimension attendue chute de la somme $q = q_1 + \dots + q_p$. Deux problèmes généraux sous-tendent nos résultats. Il s'agit d'une part de compter le nombre de membranes J -holomorphes homologues à d soumises à de telles conditions d'incidence de sorte que ce comptage ne dépende pas de J et ne dépende des conditions d'incidence qu'à homologie près. Il s'agit d'autre part de minimiser ce nombre de membranes. Si nous ne pouvons répondre au premier problème dans ce degré de généralité, il nous est par contre parfois possible de répondre au second sans même supposer l'égalité $q = \langle \mu_{TX}, d \rangle + (n - 3)\chi$, lorsque le minimum en question est nul. Le présent paragraphe est consacré aux résultats que l'on a pu obtenir dans cette direction. Ici encore le minimum est atteint en allongeant le cou d'une structure presque complexe générale.

5.1.1 En dimension supérieure

Théorème 5.1 (voir [48]) *Soit L une sphère lagrangienne dans une variété symplectique fermée (X, ω) satisfaisant $c_1(X) = \lambda\omega$, $\lambda \leq 0$ et soit $E > 0$. Supposons la dimension de X supérieure à cinq. Pour toute structure presque-complexe J générale ayant un cou suffisamment long au voisinage de L , cette variété ne possède ni membrane J -holomorphe reposant sur L ni courbe J -holomorphe rencontrant L qui soit d'énergie inférieure à E . Ce résultat reste valable en dimension quatre pour les courbes ou membranes de genre nul.*

Rappelons que l'énergie d'une courbe C est par définition l'intégrale de la forme ω sur cette courbe. Les variétés projectives à fibré canonique nul ou ample, par exemple les intersections complètes de multidegrés (d_1, \dots, d_k) de l'espace projectif de dimension N dès lors que $\sum_{i=1}^k d_i \geq N + 1$, satisfont les hypothèses du Théorème 5.1. Remarquons qu'une modification de ce dernier s'applique également aux variétés dont le fibré canonique est le produit d'un fibré ample et d'un fibré porté par un diviseur effectif disjoint de L . Le Théorème 5.1 permet de définir l'homologie de Floer de sphères lagrangiennes dans les variétés symplectiques dont la première classe de Chern s'annule, c'est un travail en cours.

Théorème 5.2 (voir [48]) *Soit L une sphère lagrangienne dans une variété symplectique fermée semipositive (X, ω) de dimension $2n \geq 6$ et soit $d \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$. Écrivons $\langle \mu_{TX}, d \rangle + (n - 3)\chi = q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 2 + (n - 3)\chi$ et $\chi \leq 2$. Lorsque $q \geq 0$, choisissons p cycles de $X \setminus L$ de codimensions $2 + q_1, \dots, 2 + q_p$ de sorte que $q = q_1 + \dots + q_p$. Dès que la structure presque complexe générale J possède un cou suffisamment long au voisinage de L , cette variété ne contient aucune membrane J -holomorphe homologue à d , de*

caractéristique d'Euler χ qui rencontre ces p cycles et repose sur L . Ce résultat reste valable pour des membranes de genre nul lorsque $n = 2$.

Exemple : la quadrique ellipsoïde.

Soit X la quadrique ellipsoïde de dimension complexe $n \geq 3$ et H une section hyperplane disjointe de L . Le groupe $H_2(X, L; \mathbb{Z})$ est monogène, engendré par la classe d_0 satisfaisant $\langle H, d_0 \rangle = +1$. La première classe de Chern de X vaut nH , d'où l'on déduit le calcul $\langle \mu_{TX}, ld_0 \rangle = 2ln$ quel que soit l'entier l . Écrivons $l = (n - 1)a + b$, le Théorème 5.2 s'applique par exemple lorsque $n + 1 \leq 2b < 2n$, les membranes sont des disques et lorsque toutes les conditions d'incidence sont ponctuelles. Rappelons que le Théorème 4.7 traite du cas $r = n - 1$ et montre ainsi en un sens l'optimalité des hypothèses faites dans ce Théorème 5.2.

Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2 :

Nous suivons la stratégie du §2.1 en équipant la sphère lagrangienne d'une métrique à courbure constante. Les éventuelles membranes qui survivraient à l'allongement du cou de J jusqu'à la brisure de la variété seraient cette fois-ci codés par des graphes A_C ayant $b + 1$ sommets marqués s_0, \dots, s_b correspondant aux composantes ayant un bord dans L . Les sommets à distances paires de s_0, \dots, s_b codent à nouveau les composantes de l'étage T^*L et les sommets à distances impaires les composantes de l'étage $X \setminus L$. Le flot de Reeb trivialisait le fibré normal de chaque composante C_s associée au sommet s d'un graphe A_C le long de ses orbites de Reeb limites. Notons μ_s le double de l'obstruction à étendre cette trivialisaiton sur C_s toute entière. Notons également, pour chaque sommet s du graphe, sa valence par v_s , la somme des multiplicités des arêtes adjacentes par k_s et la caractéristique d'Euler de la courbe qu'il code par χ_s . L'indice de Maslov des composantes codées par les sommets à distances paires de s_0, \dots, s_b , c'est-à-dire des courbes C_s de l'étage T^*L , s'exprime par la relation $\mu_s = 2(n - 1)k_s - 2\chi_s$. Pour calculer la contribution totale des sommets à distances impaires de s_0 , il faut tenir compte du fait que certaines des composantes associées peuvent revêtir des courbes simples. Notons pour chacun de ces sommets l_s le degré du revêtement, $\tilde{\mu}_s$ l'indice de Maslov de la courbe simple sous-jacente et $\tilde{\chi}_s$ sa caractéristique d'Euler. La dimension de l'espace des modules dans lequel habite cette courbe simple vaut $\tilde{\mu}_s + (n - 1)(\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s)$. La généricité de la structure presque complexe assure donc la minoration $\tilde{\mu}_s \geq -(n - 1)(\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s)$. Les courbes simples sous-jacentes étant soumises à nos p conditions d'incidence, cette dernière minoration peut après sommation être améliorée de q . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_1} \mu_s &= \sum_{s \in S_1} (l_s(\tilde{\mu}_s + 2\tilde{\chi}_s) - 2\chi_s) \\ &\geq q - (n - 3) \sum_{s \in S_1} l_s(\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s) - 2 \sum_{s \in S_1} (k_s + \chi_s) \text{ puisque } l_s \tilde{v}_s \leq k_s. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$2\chi + \sum_{s \in S_1 \cup S_2} \mu_s \geq q + 2(n - 2)k - (n - 3) \sum_{s \in S_1} l_s(\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s),$$

où $k = \sum_{s \in S_1} k_s$. Lorsque $n \geq 3$, utilisant les majorations $\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s \leq 2$ et $l_s \leq k_s$, nous aboutissons à $\sum_{s \in S_1 \cup S_2} \mu_s + 2\chi \geq q + 2$. Lorsque $n = 2$, nos hypothèses imposent $\tilde{\chi}_s + \tilde{v}_s = 2$ de sorte qu'à nouveau $\sum_{s \in S_1 \cup S_2} \mu_s + 2\chi \geq q + 2$. Le Théorème 5.2 suppose la variété semipositive, les éventuelles composantes compactes de l'étage $X \setminus L$ ont donc un indice de Maslov positif.

Par conséquent, l'indice de Maslov total satisfait la majoration $2\chi + \sum_{s \in S_1 \cup S_2} \mu_s \leq \langle \mu_{TX}, d \rangle \leq q + r - (n - 3)\chi < q + 2$. Ces minoration et majoration étant incompatibles, aucune membrane ne peut survivre jusqu'à la brisure de la variété. Le Théorème 5.2 est démontré. Dans le cas du Théorème 5.1, $q = 0$ et nous déduisons par recollement des composantes codées par le graphe A_C une membrane symplectique C de (X, L) d'indice de Maslov $\langle \mu_{TX}, [C] \rangle \geq 2$. Or par hypothèse, $\langle \mu_{TX}, [C] \rangle = 2\langle c_1(X), c \rangle = 2\lambda\langle \omega, c \rangle \leq 0$, où $c \in H_2(X; \mathbb{Z})$ relève $[C] \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$. Cette impossibilité démontre le Théorème 5.1. \square

5.1.2 En dimension quatre

Nous noterons $\mathcal{M}_{g,b}$ l'espace des modules des structures complexes de la surface compacte connexe orientée de genre g ayant b composantes de bord.

Proposition 5.3 (voir [48]) *Soit L une sphère lagrangienne dans une variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) . On suppose que cette dernière ne possède pas de sphère symplectique S satisfaisant $\langle c_1(X), [S] \rangle > 0$. Soit $(d, g, b) \in H_2(X, L; \mathbb{Z}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et K un compact de $\mathcal{M}_{g,b}$. Alors, pour toute structure presque-complexe générale ayant un cou suffisamment long au voisinage de L , la variété ne possède pas de membrane J -holomorphe homologue à d à bord dans L et conforme à un élément de K .*

Démonstration de la Proposition 5.3 :

On poursuit la stratégie du §2.1 en équipant L d'une métrique à courbure constante et en allongeant le cou d'une structure presque complexe générique jusqu'à briser la variété en deux morceaux. D'après le théorème de compacité de théorie symplectique des champs [4], les membranes que l'on considère se brisent en courbes à deux étages qui sont cette fois-ci codées par des graphes A_C ayant b sommets marqués s_1, \dots, s_b correspondant aux b composantes de bord. Les sommets à distances paires de s_1, \dots, s_b codent à nouveau les composantes de l'étage T^*L et les sommets à distances impaires les composantes de l'étage $X \setminus L$. Par hypothèse, l'étage $X \setminus L$ ne possède pas de courbe J -holomorphe rationnelle asymptote à des orbites de Reeb du fibré unitaire cotangent S^*L . En effet, une telle courbe J -holomorphe rationnelle simple C un indice de Maslov $\mu \geq -2$. Notons $v \geq 1$ le nombre de pointes asymptotes à des orbites de Reeb de S^*L et $\chi(C)$ la caractéristique d'Euler de C . En recollant à C en chacune de ses pointes un plan J -holomorphe de T^*L , on obtient une sphère symplectique S de X . Le fibré tangent à X est trivialisé le long des pointes de C par le flot de Reeb. D'après ce qui précède, le double de l'obstruction à étendre cette trivialisatation le long de C vaut $\mu + 2\chi(C)$ alors qu'elle vaut deux le long de chaque plan de T^*L . Finalement, l'indice de Maslov de S vaudrait $\mu + 4 \geq 2$, ce qui est exclu par les hypothèses. Remarquons à présent que chaque composante des courbes à deux étages est asymptote à une réunion de cylindres J -holomorphes sur les orbites de Reeb limites. Ces cylindres ont un module infini. On en déduit que peu avant la brisure de la variété X , lorsque J possède un cou extrêmement long, les membranes J -holomorphes possèdent également des anneaux de grands modules dont les âmes sont homotopes aux orbites de Reeb codées par les arêtes de l'arbre A_C . Au moins un de ces anneaux ne borde pas de disque, lequel proviendrait nécessairement d'un plan de T^*L , puisque les membranes ont un bord dans L . Par suite, lorsque le cou de la structure presque-complexe J est suffisamment allongé, les membranes J -holomorphes qui survivent à cet allongement ont une structure conforme n'appartenant pas au compact K . \square

Proposition 5.4 (voir [48]) *Soit L une surface lagrangienne orientable hyperbolique dans une variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) et soit $d \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$. On note $N_d^g(\underline{x}, J)$ le nombre de courbes J -holomorphes homologues à d à bords dans L , de topologie et de structure conforme données et qui passent par une configuration \underline{x} de points distincts de (X, ω) de cardinal adéquat, pour $J \in \mathcal{J}_\omega$ générique. Ce nombre $N_d^g(\underline{x}, J)$ s'annule pour toute structure presque-complexe générale ayant un cou suffisamment long au voisinage de L .*

Démonstration de la Proposition 5.4 :

On équipe à nouveau L d'une métrique à courbure constante et on allonge le cou d'une structure presque complexe générique au voisinage de L jusqu'à briser la variété en deux, ceci de manière à ce que les points de la configuration \underline{x} disjoints de L se retrouvent dans l'étage $X \setminus L$. Notons $b + 1$ le nombre de composantes connexes du bord des courbes que l'on considère. D'après le théorème de compacité de théorie symplectique des champs [4], ces dernières se brisent en courbes à deux étages qui sont cette fois-ci codées par des graphes A_C ayant $b + 1$ sommets marqués s_0, \dots, s_b correspondant aux $b + 1$ composantes de bord. Les sommets à distances paires de s_0, \dots, s_b codent à nouveau les composantes de l'étage T^*L et les sommets à distances impaires les composantes de l'étage $X \setminus L$. Les orbites de Reeb du fibré unitaire cotangent S^*L sont cette fois-ci non-dégénérées, on fixe la trivialisatoin standard de S^*L le long de ces orbites de Reeb, de sorte que leur indice de Conley-Zehnder soit nul, voir la Proposition 1.7.3 de [11]. La dimension de l'espace des modules d'une composante simple C_s de l'étage $X \setminus L$ est donnée par le Théorème 2.8 de [18], elle vaut $\mu_s^{CZ} + \chi_s$ où μ_s^{CZ} est l'indice de Conley-Zehnder total de la composante et χ_s sa caractéristique d'Euler. Un revêtement ramifié d'une courbe simple ne peut en particulier qu'augmenter cette dimension puisque les indices de Conley-Zehnder des orbites de Reeb ont ici la propriété de s'additionner sous de tels revêtements. Par suite, l'inégalité $\mu_s^{CZ} + \chi_s \geq 2n_s$ (resp. $\mu_s^{CZ} + \chi_s \geq n_s$) est satisfaite pour chaque sommet s du graphe A_C à distance impaire (resp. paire) de s_0, \dots, s_b , si $n_s \geq 0$ désigne le nombre de points de la configuration \underline{x} par lesquels passe la composante codée par s . En sommant ces inégalités sur tous les sommets du graphe A_C , on déduit que la dimension totale attendue de la courbe C se trouve minorée par $r + 2r_X$ où r est le cardinal de $\underline{x} \cap L$ et r_X le cardinal de $\underline{x} \setminus L$. Comme par hypothèse cette dimension vaut $r + 2r_X$, les inégalités précédentes sont des égalités. Il suit en particulier que toutes les courbes de l'étage $X \setminus L$ ont une dimension attendue paire; elles ne peuvent par conséquent être planes. Comme par ailleurs L ne possède pas de géodésique contractile, on vient de montrer que le graphe A_C ne possède pas de feuille exception faite éventuellement des sommets s_0, \dots, s_b . Remarquons à présent que chaque composante de la courbe à deux étages est asymptote à une réunion de cylindres J -holomorphes sur les orbites de Reeb limites. Ces cylindres ont un module infini. On en déduit que les courbes comptées par $N_d^g(\underline{x}, J)$, lorsque J possède un cou extrêmement long, possèdent également des anneaux de grands modules dont les âmes sont homotopes aux orbites de Reeb codées par les arêtes de l'arbre A_C . Or les courbes à bords comptées par $N_d^g(\underline{x}, J)$ sont supposées avoir une structure conforme fixée. Tout anneau dont le module est supérieur à une certaine quantité donnée par la structure conforme doit donc être contenu dans un disque. Par suite, lorsqu'on prive une telle courbe de la collection finie d'âmes de nos anneaux de grands modules codés par les arêtes de A_C , elle se trouve déconnectée en plusieurs composantes dont une au moins est un disque. Ce disque doit correspondre à une feuille du graphe A_C distincte de s_0, \dots, s_b . Nous aboutissons ainsi à une impossibilité qui prouve que l'ensemble des courbes à deux étages sur lequel nous avons fondé notre raisonnement est vide,

ce qu'il fallait démontrer. \square

Proposition 5.5 (voir [48]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle fermée de dimension quatre dont le lieu réel possède un tore lagrangien ou bien une surface hyperbolique lagrangienne L , orientable ou non. On suppose que (X, ω, c_X) ne possède pas de sphère symplectique réelle S satisfaisant $\langle c_1(X), [S] \rangle > 1$ si L est orientable et $\langle c_1(X), [S] \rangle > 0$ sinon. Soit $(d, g, b) \in H_2(X, L; \mathbb{Z}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et K un compact de $\mathcal{M}_{g,b}$. Alors, pour toute structure presque-complexe générale ayant un cou suffisamment long au voisinage de L , la variété ne possède pas de membrane J -holomorphe homologue à d à bord dans L et conforme à un élément de K .*

Démonstration de la Proposition 5.5 :

On équipe à nouveau L d'une métrique à courbure constante et on allonge le cou d'une structure presque complexe générique au voisinage de L jusqu'à briser la variété en deux morceaux. D'après le théorème de compacité de théorie symplectique des champs [4], les membranes J -holomorphes homologues à d , de genre g ayant b composantes de bord dans L qui survivent à cette déformation se brisent en courbes à deux étages codées par des graphes A_C ayant b sommets marqués s_1, \dots, s_b correspondant aux b composantes de bord. Les seules feuilles de ces arbres sont alors ces b sommets s_1, \dots, s_b . En effet, ces feuilles coderaient sinon des plans J -holomorphes asymptotes à des orbites de Reeb du fibré unitaire cotangent S^*L . Ces orbites de Reeb n'étant pas contractiles dans T^*L , les plans J -holomorphes doivent être dans l'étage $X \setminus L$. La réunion d'un tel plan P , de son image par l'involution $c_X(P)$ et d'un cylindre J -holomorphe de T^*L sur l'orbite de Reeb asymptote de P fournit une sphère à deux étages. Cette sphère se recolle en une sphère symplectique S de (X, ω) dont l'indice de Maslov vaut le double de l'obstruction à étendre la trivialisatation canonique de TX le long de l'orbite de Reeb à S tout entier. Lorsque L est orientable, cette obstruction est nulle le long du cylindre de T^*L et supérieure à un le long de P d'après le Théorème 2.8 de [18]. On en déduit que l'indice de Maslov de S serait supérieur à quatre, ce qui contredit les hypothèses. De la même manière lorsque L est non-orientable, l'indice de Maslov de S vaut la somme des indices de Conley-Zehnder de P , $c_X(P)$ et du cylindre. Ces derniers sont supérieurs à leur caractéristique d'Euler puisqu'habitent des espaces de modules de dimensions attendues positives, voir le Théorème 2.8 de [18]. Par sommation, l'indice de Maslov de S devrait être supérieur à deux ce qui contredit à nouveau les hypothèses. Les seules feuilles des arbres codant les courbes à deux étages limites étant les b sommets marqués s_1, \dots, s_b , on déduit comme dans la démonstration de la Proposition 5.4 que peu avant la brisure de la variété, les membranes J -holomorphes homologues à d , de genre g ayant b composantes de bord dans L possèdent un anneau de grand module au moins, d'âme voisine d'une orbite de Reeb de S^*L . En particulier, elles n'appartiennent pas au compact K de $\mathcal{M}_{g,b}$, ce qu'il fallait démontrer. \square

5.2 Présence de membranes J -holomorphes

Les résultats présentés aux §§2.1 et 4.1 permettent de garantir l'existence de disques J -holomorphes reposant sur une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique donnée, lorsque cette lagrangienne se trouve dans le lieu fixe d'une involution antisymplectique, laquelle est J -antiholomorphe et à condition que l'invariant que l'on a défini n'est pas nul. Nous souhaitons montrer ici qu'il est possible d'obtenir ces résultats pour une classe plus large de sous-variété lagrangiennes, en faisant intervenir la notion d'involutions antibirationnelles sur

les variétés symplectiques. (Les résultats présentés dans ce §5.2 ont été exposés en 2004 mais sont rédigés ici pour la première fois.)

5.2.1 Involutions antibirationnelles des variétés symplectiques de dimension quatre

Une involution c_X de la variété symplectique de dimension quatre (X, ω) qui est définie en-dehors d'un nombre fini de points x_1, \dots, x_k de X est dite *antibirationnelle* lorsqu'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} (Y, J_Y) & \xrightarrow{c_Y} & (Y, J_Y) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (X, J_X) & \xrightarrow{c_X} & (X, J_X) \end{array}$$

où Y est une variété compacte de dimension quatre obtenue à partir de X en réalisant un nombre fini d'éclatements topologiques au-dessus des points x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, J_X, J_Y sont des structures presque-complexes lisses et c_Y une involution J_Y -antiholomorphe sur Y toute entière. De plus, J_X est supposée ω -positive, c_X est J_X -antiholomorphe sur son lieu de définition et π est (J_Y, J_X) -holomorphe.

Les involutions antibirationnelles classiques sur les surfaces compactes de Kähler fournissent des exemples de telles surfaces. Remarquons que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\pi^{-1}(x_i)$ est un arbre de sphères J_Y -holomorphes n'ayant que des points doubles transverses comme singularités.

Lemme 5.6 *Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et toute composante irréductible C de l'arbre $\pi^{-1}(x_i)$, $c_Y(C)$ ne soit pas contractée par π sur x_1, \dots, x_k . Alors, le diagramme ci-dessus est unique à équivalence près, une fois donnée (X, ω, c_X) .*

Démonstration :

Soient $(Y_1, c_{Y_1}), (Y_2, c_{Y_2})$ deux telles variétés et π_1, π_2 les projections correspondantes sur X . Ces projections induisent un difféomorphisme $\Phi : Y_1 \setminus (\cup_{i=1}^k \pi_1^{-1}(x_i)) \rightarrow Y_2 \setminus (\cup_{i=1}^k \pi_2^{-1}(x_i))$. Soient $\underline{y}_1 = (\cup_{i=1}^k \pi_1^{-1}(x_i)) \cap c_{Y_1}(\cup_{i=1}^k \pi_1^{-1}(x_i))$ et $\underline{y}_2 = (\cup_{i=1}^k \pi_2^{-1}(x_i)) \cap c_{Y_2}(\cup_{i=1}^k \pi_2^{-1}(x_i))$. Ces ensembles $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ sont finis, d'après les hypothèses. Comme Φ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante, elle se prolonge en un difféomorphisme $Y_1 \setminus \underline{y}_1 \rightarrow Y_2 \setminus \underline{y}_2$ par la formule $c_{Y_2} \circ \Phi \circ c_{Y_1} = \Phi$. Par suite, elle s'étend de façon unique en un difféomorphisme $Y_1 \rightarrow Y_2$, ce qui prouve le résultat. \square

Soient (X, ω, J_X, c_X) satisfaisant les hypothèses du Lemme 5.6 et (Y, J_Y, c_Y) la variété de dimension quatre associée. Soit \underline{y} l'ensemble fini $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cap c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i))$. L'involution antibirationnelle c_X est dite *simple* lorsqu'elle satisfait les hypothèses du Lemme 5.6 et lorsque \underline{y} se trouve en-dehors des points doubles de $\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)$.

Lemme 5.7 *Soit c_X une involution antibirationnelle simple de (X, ω) et (Y, c_Y) la variété de dimension quatre donnée par le Lemme 5.6. Alors, la deux-forme $\omega_Y = \pi^*\omega - (\pi \circ c_Y)^*\omega$ est fermée et non-dégénérée en tout point de $Y \setminus \underline{y}$. Elle est également non-dégénérée en tout point d'intersection transverse de $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cap c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \subset \underline{y}$.*

Une telle deux-forme qui n'a qu'un nombre fini de noyaux de dimension deux sera dite *quasi-symplectique*. Remarquons qu'en particulier, lorsque l'intersection $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cap c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i))$ est transverse, la deux-forme ω_Y est symplectique.

Démonstration :

La deux-forme ω_Y est fermée puisque ω l'est. De plus, pour tous $y \in Y$ et $v \in T_y Y \setminus \{0\}$, $\omega_Y(v, J_Y(v)) = \omega(d\pi(v), J_X d\pi(v)) + \omega(d(\pi \circ c_Y)(v), J_X d(\pi \circ c_Y)(v)) \geq 0$. Cette dernière s'annule si et seulement si $d\pi(v)$ et $d(\pi \circ c_Y)(v)$ s'annulent simultanément, ce qui arrive si et seulement si $y \in \underline{y}$ est un point d'intersection non transverse de $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cap c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i))$ et v est tangent à cette intersection. \square

La structure presque-complexe J_Y est ω_Y -positive dans le sens que pour tous $y \in Y$ et $v \in T_y Y \setminus \{0\}$, soit v et $J_Y(v)$ engendrent le noyau de $\omega_Y|_y$, soit $\omega_Y(v, J_Y(v)) > 0$. Notons \mathcal{J}_{ω_Y} l'espace des structures presque-complexes de classe C^l qui sont ω_Y -positives. Si $J \in \mathcal{J}_{\omega_Y}$, alors $\bar{c}_Y^*(J) = -dc_Y \circ J \circ dc_Y$ appartient également à \mathcal{J}_{ω_Y} . Notons $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}$ le lieu fixe de cette action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur \mathcal{J}_{ω_Y} .

Lemme 5.8 *Soient c_X une involution antibirationnelle simple sur (X, ω) et (Y, c_Y, ω_Y) la variété de dimension quatre donnée par les Lemmes 5.6, 5.7. Il existe $J_0 \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}$ tel que $\omega_Y(J_0, J_0) = \omega_Y$ et $g_Y = \omega_Y(\cdot, J_0)$ soit un deux-tenseur symétrique positif sur Y , défini en-dehors de \underline{y} .*

Démonstration :

Soit g une métrique riemannienne sur Y invariante sous l'action de c_Y . Soit $A \in \Gamma^\infty(Y, \text{End}_{\mathbb{R}}(TY))$ tel que pour tous $y \in Y$, $u, v \in T_y Y$, $\omega_Y|_y(u, v) = g_y(Au, v)$. Notons $A = QJ_0$ sa décomposition polaire, où J_0 est g -orthogonale et Q est symétrique définie positive. Cette décomposition est bien définie en tout point $y \in Y \setminus \underline{y}$. De la relation $A^* = -A$ suit $QJ_0 = J_0Q$ et $J_0^2 = -Id$. Par suite, J_0 s'étend de façon unique en une structure presque-complexe définie sur Y tout entier, g -orthogonale et préservant les noyaux de ω_Y ainsi que leurs orientations. De même, Q est un endomorphisme positif semi-défini de TY . Ainsi, $g_Y = \omega_Y(\cdot, J_0) = g(Q, \cdot)$ convient et de plus, $\bar{c}_Y^*(A) = A$, $c_Y^*(Q) = Q$, de sorte que $\bar{c}_Y^*(J_0) = J_0$, soit $J_0 \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega}$. \square

Pour tout voisinage U de \underline{y} et tout $J_0 \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}$ donné par le Lemme 5.9, notons $\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ (resp. $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$) le sous-espace des $J \in \mathcal{J}_{\omega_Y}$ (resp. $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}$) telles que $J = J_0$ sur U .

Lemme 5.9 *Pour tous U, J_0 , l'espace $\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ est une variété de Banach séparable non-vide et contractile. Le sous-espace $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ en est une sous-variété de Banach séparable non-vide et contractiles. \square*

Remarque 5.10 La deux-forme $\pi^*\omega$ est limite d'une suite de formes symplectiques sur Y obtenues après un nombre fini d'éclatements de boules symplectiques dont les rayons convergent vers zéro. Par suite, la deux-forme ω_Y est limite d'une suite de formes symplectiques $(\omega_Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, $J \in \mathcal{J}_{\omega_Y}$ est ω_Y^n -positif pour n assez grand, principalement parce-que les noyaux de ω_Y deviennent symplectiques pour ω_Y^n .

5.2.2 Invariants énumératifs des involutions antibirationnelles simples

Soient c_X une involution antibirationnelle simple sur (X, ω) et $x_1, \dots, x_k \in X$ les points où elle n'est pas définie. Soit (Y, ω_Y, c_Y) la variété quasi-symplectique de dimension quatre associée, voir le Lemme 5.7. Soient π la projection $Y \rightarrow X$ et \underline{y} l'ensemble fini $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cap c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i))$. Soit $\mathbb{R}Y$ le lieu fixe de c_Y , on étiquette ses composantes connexes

$(\mathbb{R}Y)_1, \dots, (\mathbb{R}Y)_N$. Remarquons que la courbe $(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)) \cup c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i))$ n'intersecte $\mathbb{R}Y$ qu'en un nombre fini de points, de sorte qu'elle ne déconnecte aucune des courbes $(\mathbb{R}Y)_i$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Soient $d_Y \in H_2(Y; \mathbb{Z})$ tel que $(c_Y)_*d_Y = -d_Y$, $c_1(Y)d_Y > 0$ et $y = (y_1, \dots, y_{c_1(Y)d_Y - 1})$ une configuration réelle de $c_1(Y)d_Y - 1$ points distinct de $Y \setminus (\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i) \cup c_Y(\cup_{i=1}^k \pi^{-1}(x_i)))$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, notons $r_i = \#(y \cap (\mathbb{R}Y)_i)$ puis $r = (r_1, \dots, r_N)$. Soient U , voisinage de \underline{y} et $J_0 \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ donnés par le Lemme 5.9. Alors, dès que U est suffisamment petit, pour tout $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ générique, il n'y a qu'un nombre fini de courbes J -holomorphes rationnelles réelles homologue à d_Y dans Y qui contiennent y . Ces courbes sont toutes irréductibles, immergées et n'ont que des points doubles transverses comme singularités. Le nombre total de leurs points doubles vaut $\delta_Y = \frac{1}{2}(d_Y^2 - c_1(Y)d_Y + 2)$. Pour tout entier m compris entre 0 et δ_Y , notons $n_d(m)$ le nombre de ces courbe qui sont de masse m . On pose alors

$$\chi_r^{d_Y}(y, J, U, J_0) = \sum_{m=0}^{\delta_Y} (-1)^m n_d(m).$$

Théorème 5.11 *L'entier $\chi_r^{d_Y}(y, J, U, J_0)$ ne dépend pas des choix de y, J, U et J_0 . \square*

Démonstration :

L'indépendance de U et J_0 découle du fait que lorsque J est générique dans $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ et lorsque U est suffisamment petit, aucune des courbes J -holomorphes rationnelles de Y homologues à d_Y qui passent par y ne rencontre U . L'indépendance de y et J se montre comme le Théorème 2.1. \square

Remarquons que l'entier $\chi_r^{d_Y}$ fourni par le Théorème 5.11 est un invariant par déformation du triplet (X, ω, c_X) , puisque le triplet (Y, ω_Y, c_Y) lui est canoniquement associé.

5.2.3 Exemple : les tores isotopes au tore de Clifford

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{T}_{a,b} \subset \mathbb{C}P^2$ le tore lagrangien défini par les équations $|x| = a$, $|y| = b$ dans les coordonnées affines $(x, y) \in (\mathbb{C})^2 \subset \mathbb{C}P^2$. Ce tore est le lieu fixe de l'involution antibirationnelle de Cremona $c^{a,b} : (x, y, z) \in \mathbb{C}P^2 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \mapsto (a^2 \bar{y}z, b^2 \bar{x}z, \bar{x}y) \in \mathbb{C}P^2$. Cette involution antibirationnelle $c^{a,b}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, est simple. En effet, soit Y le plan projectif éclaté aux trois points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $\pi : Y \rightarrow \mathbb{C}P^2$ la projection associée. L'involution $c^{a,b}$ se relève en une involution antiholomorphe $c_Y^{a,b}$ définie partout, soit une structure réelle. Cette dernière envoie les trois diviseurs exceptionnels sur les transformées strictes des côtés du triangle $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, d'où la simplicité de $c^{a,b}$. Ainsi, le Théorème 5.11 s'applique et fournit des invariants $\chi_r^{d_Y}$ par déformation du triplet $(\mathbb{C}P^2, \omega, c^{a,b})$. Le deuxième groupe d'homologie de Y est engendré par une droite générique et les diviseurs exceptionnels E_1, \dots, E_3 de nos éclatements. La classe d'homologie d_Y de nos courbes rationnelles réelles de Y est déterminée par quatre entiers d, d_1, \dots, d_3 satisfaisant la relation $d = d_1 + d_2 + d_3$. Si l'on contracte E_1, \dots, E_3 , ces courbes se contractent sur des courbes rationnelles de degré d du plan qui ont un point de multiplicité d_1, d_2, d_3 en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ respectivement. Ces courbes rationnelles immergées ont en outre la propriété de rencontrer le tore $\mathbb{T}_{a,b}$ en une collection de points isolés et en un cercle immergé, elles consistent en fait en une paire de disques J -holomorphes qui reposent sur $\mathbb{T}_{a,b}$ et sont échangés par $c^{a,b}$. Si l'on contracte plutôt un diviseur exceptionnel, disons E_3 , ainsi que son image sous $c_Y^{a,b}$, alors on obtient des courbes rationnelles de bidegré $(d_1 + d_3, d_2 + d_3)$ sur

l'hyperboloïde quadrique $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \text{conj} \times \text{conj})$, qui ont une paire de points de multiplicité d_3 en deux points complexes conjugués, à savoir les points où E_3 et son image se contractent. Lorsque $d_3 = 0$ ou 1 , cet invariant $\chi_r^{d_Y}$ vaut l'invariant correspondant dans l'hyperboloïde quadrique $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \text{conj} \times \text{conj})$, à savoir $\chi_r^{(d_1, d_2)}$ et $\chi_r^{(d_1+1, d_2+1)}$ respectivement. Des estimations de ces derniers se trouvent dans [19].

Corollaire 5.12 *Soient $r, s, d \in \mathbb{N}$ tels que $r + 2s = 2d - 1$ et supposons donnée une collection de r points distincts dans $\mathbb{T}_{a,b} \subset \mathbb{C}P^2$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ainsi qu'une collection de s paires distinctes de points dans $\mathbb{C}P^2 \setminus (\mathbb{T}_{a,b} \cup \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$ échangées par l'involution antibirationnelle $c^{a,b}$. Alors, pour tous $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$ tels que $d = d_1 + d_2 + d_3$, il y a au moins $|\chi_r^{d_Y}|$ paires de disques J_X -holomorphes reposant sur $\mathbb{T}_{a,b}$, échangés par $c^{a,b}$, passant par les r points donnés et intersectant chacune des s paires de points complexes conjugués, dès lors que J_X se relève en une structure J_Y appartenant à l'un des $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\omega_Y}^{U, J_0}$ donné par le Lemme 5.9. La réunion de ces deux disques dans chacune de ces paires forme une courbe rationnelle plane de degré d ayant un point de multiplicité d_1, d_2, d_3 en $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ respectivement. \square*

Appendice A. Classes effectives et tores lagrangiens dans les variétés symplectiques de dimension quatre

Soit (X, ω) une variété symplectique fermée de dimension quatre. Une classe d'homologie $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ est dite effective lorsqu'elle est représentable par une courbe J -holomorphe (possiblement réductible et de genre arbitraire) pour tout $J \in \mathcal{J}_\omega$. Notons $B_\omega(X)$ le sous-groupe de $H_2(X; \mathbb{Z})$ engendré par les classes effectives. Notons de même $A_\omega^1(X)$ (resp. $A_\omega^2(X)$) le sous-groupe de $H_2(X; \mathbb{Z})$ engendré par les tores lagrangiens plongés (resp. les surfaces lagrangiennes orientables hyperboliques plongées).

Théorème 5.13 (voir [46]) *Pour toute variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) , les groupes $A_\omega^1(X)$ et $B_\omega(X)$ sont orthogonaux pour la forme d'intersection.*

Esquisse de la démonstration du Théorème 5.13 :

Étant donné un tore L , on suit le principe dicté par la théorie symplectique des champs en munissant ce tore d'une métrique plate et en allongeant le cou de la variété au voisinage de L jusqu'à la briser en deux morceaux T^*L et $X \setminus L$. D'après le Théorème de compacité [4], toute classe effective d se trouve réalisée par une courbe à deux étages. Soient C_L la partie de C dans T^*L et C^X celle de $X \setminus L$. Si C^L est vide, le résultat est évident ; sinon, on observe que la classe d'homologie du bord de C^L s'annule dans $H_1(S^*L; \mathbb{Z})$. En effet, elle appartient au groupe R_λ engendré par les orbites de Reeb fermées de S^*L et sa projection s'annule dans $H_1(L; \mathbb{Z})$. Or R_λ se trouve être isomorphe à \mathbb{Z}^2 et la projection établit un isomorphisme avec $H_1(L; \mathbb{Z})$. Soit S une deux-chaîne de S^*L bordée par $\partial C_L = -\partial C_X$. Alors $C^L - S$ et $C^X + S$ sont des deux-cycles entiers dont la somme vaut d en homologie et qui sont tous deux orthogonaux à L . \square

Corollaire 5.14 (voir [46]) *Soient L un tore lagrangien et S une sphère pseudo-holomorphe satisfaisant $c_1(X)[S] > 0$ dans une variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) . Alors, l'indice d'intersection de L et S s'annule.*

Démonstration :

On sait depuis le Lemme 3.1 de [22] qu'une telle sphère produit nécessairement un invariant de Gromov-Witten ponctuel non-nul, sa classe d'homologie est donc forcément effective, de sorte que le résultat découle du Théorème 5.13. \square

Ce Corollaire 5.14 suggère la possibilité de disjointre L et S , ce qui est confirmé par le Théorème 5.15.

Théorème 5.15 (voir [46]) *Soient L une surface lagrangienne orientable de genre strictement positif et S une sphère pseudo-holomorphe satisfaisant $c_1(X)[S] > 0$ dans une variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) . Alors, S est symplectiquement isotope à une surface disjointe de L .*

Esquisse de la démonstration du Théorème 5.15 :

Quitte à éclater la variété, ou mieux à imposer à S de passer par $c_1(X)[S] - 1$ points donnés, on peut supposer $c_1(X)[S] = 1$, c'est-à-dire S rigide. On allonge le cou de la variété au voisinage de L jusqu'à la briser en deux morceaux T^*L et $X \setminus L$. La sphère S se brise en une courbe à deux étages de genre nul. On montre que chaque composante de cette dernière doit être rigide. Tout arbre possédant au moins une feuille, cette dernière possède au moins une composante biholomorphe à \mathbb{C} . Si $g(L) > 1$, d'après le Théorème 2.8 de [18], la dimension virtuelle d'une telle composante s'écrit $\mu_{CZ} - 1$ où μ_{CZ} est son indice de Conley-Zehnder. Comme ce dernier est pair, la dimension virtuelle est impaire et ne peut donc pas chuter à zéro avec des conditions d'incidence ponctuelles. Ceci force un des deux étages de la courbe à être vide. La démarche est analogue dans le cas du tore, voir [46]. \square

Exemples :

1) Un tore lagrangien du plan projectif complexe est symplectiquement isotope à un tore du plan affine \mathbb{C}^2 .

2) Si $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ est l'éclatement de (X, ω) en une boule compacte, alors toute surface lagrangienne orientable de genre strictement positif de $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ est symplectiquement isotope à une surface disjointe du diviseur exceptionnel.

Rappelons que deux variétés symplectiques fermées de dimension quatre sont dites birationnellement équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini d'éclatements ou de contractions de boules symplectiques compactes, voir [16], [23].

Corollaire 5.16 (voir [46]) *Le groupe $H_2(X; \mathbb{Z})/B_\omega(X)$ est invariant par transformation birationnelle de la variété symplectique fermée de dimension quatre (X, ω) . Soit $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ l'éclatement de (X, ω) en une boule compacte. Alors, les groupes $A_\omega^1(\tilde{X})$, $A_\omega^2(\tilde{X})$ sont respectivement des sous-groupes de $A_\omega^1(X)$, $A_\omega^2(X)$. \square*

Il se pourrait que les groupes $A_\omega^1(X)$, $A_\omega^2(X)$ soient eux aussi invariants par transformations birationnelles de (X, ω) . Cela découlerait d'une solution affirmative au problème suivant.

Problème 5.17 (voir [46]) *Étant donné une boule symplectique compacte B et une surface lagrangienne orientable de genre strictement positif L dans une variété symplectique fermée de dimension quatre. Existe-t-il une surface lagrangienne homologue et homéomorphe à L , disjointe de B ?*

Remarquons que $A_\omega^1(X)$, $A_\omega^2(X)$ ne sont pas invariants par déformation de la forme symplectique ω et de même $B_\omega(X)$ n'a pas de raison de l'être a priori. Il y a ici une analogie troublante avec la décomposition de Hodge d'une surface complexe compacte, voir le Théorème (2.10) de [1]. En effet, les groupes $(H^{2,0}(X; \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X; \mathbb{C})) \cap H^2(X; \mathbb{Z})$ et $H^2(X; \mathbb{Z})/H^{1,1}(X; \mathbb{Z})$ sont invariants par transformation birationnelle de la structure complexe de la surface, mais pas par déformation de cette dernière.

Exemples :

1) Si $b_2^+(X) = 1$, $A_\omega^1(X)$ est de torsion et $A_\omega^2(X)$ s'annule, ce que l'on sait depuis Comessatti ([8]?). Nous avons pu obtenir avec les mêmes méthodes le résultat plus général suivant.

Théorème 5.18 (voir [46]) *Le fibré unitaire cotangent d'une surface orientable hyperbolique n'admet aucun plongement de type contact dans une variété symplectique de dimension quatre rationnelle ou réglée.*

Démonstration :

On remarque qu'une variété symplectique de dimension quatre rationnelle ou réglée possède une sphère pseudo-holomorphe S satisfaisant $c_1(X)[S] \geq 2$. Supposons que (X, ω) possède une telle hypersurface de type contact (S^*L, λ) . On peut suivre la même démarche que dans la démonstration du Théorème 5.15, en fixant un des points par lesquels on contraint S de passer dans un voisinage de Liouville de (S^*L, λ) , dans le passé du flot de Liouville. Ceci force la courbe à se briser en une courbe à deux étages, chacun des deux étages devant être non-vide. Le raisonnement suivi dans la démonstration du Théorème 5.15 amène une contradiction. \square

2) Si (X, ω) est rationnelle, $B_\omega(X) = H_2(X; \mathbb{Z})$.

3) Si X est un produit de deux courbes (C_1, ω_1) et (C_2, ω_2) muni de la forme symplectique $\omega_1 \ominus \omega_2$, alors $A_\omega^1(X)$ contient le sous-groupe $H_1(C_1; \mathbb{Z}) \otimes H_1(C_2; \mathbb{Z})$ donné par la formule de Künneth. Lorsque de plus (C_1, ω_1) et (C_2, ω_2) sont des tores symplectomorphes, $A_\omega^1(X)$ contient le graphe du symplectomorphisme.

4) Si X est le produit de deux courbes de genre un, $B_\omega(X)$ s'annule. Lorsqu'une des courbes est de genre différent de un, $B_\omega(X)$ contient la classe canonique de X d'après [32].

Appendice B. Classes de déformation des variétés algébriques réelles réglées

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont également plus éloignés du thème principal de ce mémoire. Il s'agit de déterminer à déformation près les structures réelles que possèdent les variétés réglées. J'ai pu en fournir la liste complète dans mes travaux [39] et [40], premiers travaux que j'ai réalisés à la suite de ma thèse et qui sont antérieurs à ceux présentés jusqu'ici dans ce mémoire.

Une variété réglée est par définition une variété algébrique lisse équipée d'une submersion holomorphe propre sur une courbe compacte lisse irréductible B , submersion dont les fibres sont des espaces projectifs. En dimension deux, il s'agit des surfaces géométriquement réglées.

Lemme 5.19 (voir [40]) *À l'exception de la quadrique de dimension deux, le réglage $p : X \rightarrow B$ d'une variété réglée X est unique. De plus, il existe un fibré vectoriel holomorphe*

$E \rightarrow B$ dont le projectivisé $P(E)$ est isomorphe à X . Deux tels fibrés ont cette propriété si et seulement si l'un est obtenu par produit tensoriel de l'autre par un fibré en droites. \square

Les variétés réglées sont en particulier toutes projectives. On définit le degré de $X = P(E)$ comme le degré de E réduit modulo n , la dimension complexe de X . Ceci est justifié par la relation $\deg(E \otimes L) = \deg(E) + n \deg(L)$. On notera $\deg(X) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemme 5.20 (voir [40]) *Soit $p : X \rightarrow B$ une variété réglée de dimension $n > 2$ et c_X une structure réelle sur X , c'est-à-dire une involution antiholomorphe. Il existe une unique structure réelle c_B sur la base B satisfaisant $p \circ c_X = c_B \circ p$. \square*

On déduit de ce lemme que les composantes connexes du lieu réel de X sont homéomorphes à des fibrés en espaces projectifs sur le cercle. Lorsque la dimension n de X est impaire, un tel fibré est unique tandis que lorsque n est paire, il existe deux tels fibrés, un orientable, l'autre non. On définit le type topologique d'une variété réglée réelle (X, c_X) comme le quintuplet d'entiers (t, k, g, μ, ϵ) , où t désigne le nombre de composantes connexes orientables de $\mathbb{R}X$, k le nombre de composantes connexes non-orientables de $\mathbb{R}X$, et (g, μ, ϵ) le type topologique de la courbe (B, c_B) , c'est-à-dire respectivement son genre, le nombre de composantes de son lieu réel et son caractère séparant ou non.

On peut construire des variétés réglées de la façon suivante. Soient (B, c_B) une courbe algébrique réelle et $L \rightarrow B$ un fibré en droites holomorphe satisfaisant $c_B^*(L) = L^*$, où c_B^* désigne la structure réelle induite sur le groupe de Picard $\text{Pic}(B)$. Soient D un diviseur associé à L et f_D une fonction méromorphe sur B satisfaisant $\text{Div}(f_D) = D + c_B(D)$ et $f_D = \overline{f_D} \circ c_B$ (voir le Lemme 1.3 de [39]). Le signe de f_D est en particulier constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}B$.

Proposition 5.21 (voir [40]) *À tout tel couple (D, f_D) sur (B, c_B) , on associe une structure réelle c_{f_D} sur $X = P((L \oplus L_0)^{\frac{n}{2}})$, fibrée au-dessus de c_B . Le lieu réel est alors orientable et se surjecte sur les composantes de $\mathbb{R}B$ sur lesquelles f_D est positive.*

Esquisse de la démonstration :

Soient $D = \sum_{i=1}^k n_i p_i$ où $p_i \in B$ et $n_i \in \mathbb{Z}$ for $i \in \{1, \dots, k\}$, on peut supposer l'ensemble $\{p_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ invariant sous l'action de c_B . Soient $U_0 = B \setminus \{p_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ et (U_{p_i}, ϕ_{p_i}) , $i \in \{1, \dots, k\}$, un atlas compatible avec D et le groupe $\langle c_B \rangle$ (voir [39], page 3).

Les morphismes :

$$\begin{aligned} (U_{p_i} \setminus p_i) \times \mathbb{C}P^{n-1} &\rightarrow U_0 \times \mathbb{C}P^{n-1} \\ (x, (z_1^j : z_0^j)) &\mapsto (x, (\phi_{p_i}(x)^{-n_i} z_1^j : z_0^j)) \end{aligned}$$

($i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$) permettent de recoller les trivialisations $U_{p_i} \times \mathbb{C}P^{n-1}$, $i \in \{0, \dots, k\}$, de manière à construire la variété réglée X .

À présent, les applications

$$\begin{aligned} U_0 \times \mathbb{C}P^{n-1} &\rightarrow U_0 \times \mathbb{C}P^{n-1} \\ (x, (z_1^j : z_0^j)) &\mapsto (c_B(x), (\overline{z_0^j} : f_D \circ c_B(x) \overline{z_1^j})), \end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} U_{p_i} \times \mathbb{C}P^{n-1} &\rightarrow U_{c_B(p_i)} \times \mathbb{C}P^{n-1} \\ (x, (z_1^j : z_0^j)) &\mapsto (c_B(x), (\overline{z_0^j} : f_D \circ c_B(x) \overline{\phi_{p_i}(x)^{-n_{c_B(p_i)}} z_1^j})), \end{aligned}$$

où $j \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$, se recollent et définissent l'involution antiholomorphe c_{f_D} sur X . Cette dernière possède les propriétés énoncées. \square

Rappelons la classification suivante, voir [28].

Théorème 5.22 *Deux variétés réglées sont équivalentes par déformation si et seulement si elles ont même degré et des bases de même genre.* \square

Rappelons également que des variétés réglées de degrés opposés et de bases homéomorphes sont difféomorphes bien qu'elles ne soient pas équivalentes par déformation, voir [5].

Théorème 5.23 (voir [39], [40]) *Deux variétés réglées de dimension impaire sont équivalentes par déformation si et seulement si elles ont même degré et des bases de même type topologique. De même, deux variétés réglées de dimension paire sont équivalentes par déformation si et seulement si elles ont même degré, même type topologique ainsi que des quotients homéomorphes.*

Stratégie de la démonstration :

Étant donnée une variété réglée $X \rightarrow B$, on choisit un fibré vectoriel $E \rightarrow B$ dont le projectivisé vaut X . On montre qu'un tel fibré possède un sous-fibré en droites réel de rang un ou deux L , ce qui permet de l'écrire comme extension d'un fibré réel M par L . En multipliant la classe d'extension de ce fibré par un paramètre complexe t , on construit une déformation sur \mathbb{C} dont les fibres en dehors de 0 sont isomorphes à E et la fibre en zéro à la somme directe $L \oplus M$. Ceci nous permet de déformer la variété réglée X sur une variété décomposée en sections ou surfaces réglées réelles. Il nous est ensuite possible de classifier les structures réelles à conjugaison près sur ce type de variété, pour aboutir au résultat. \square

Remarque 5.24 Dès que des variétés de dimension paire ont des lieux réels non-vides, la condition portant sur les quotients homéomorphes est inutile. Toutefois, lorsque le lieu réel est vide, il existe deux classes de déformations de variétés réglées ayant même degré et même type topologique.

En dimension n impaire, les variétés réglées $P(L(x + c_B(x))^d \oplus L_0^{n-d})$, où $d \in \{0, \dots, n-1\}$ et $x \in B \setminus \mathbb{R}B$, sont toutes réelles, quel que soit le type topologique de (B, c_B) . Par conséquent, il existe des variétés réglées réelles de tous types topologiques. Un quintuplet d'entiers (t, k, g, μ, ϵ) est dit réalisable si $t, k \geq 0$, $t + k \leq \mu$ et (g, μ, ϵ) est le type topologique d'une courbe réelle.

Proposition 5.25 (voir [40]) *Tout quintuplet réalisable (t, k, g, μ, ϵ) est le type topologique d'une variété réglée de toute dimension paire et de tout degré d satisfaisant $d = k \pmod{2}$. Il n'existe pas de variété réglée réelle de dimension paire satisfaisant $d \neq k \pmod{2}$.*

Esquisse de la démonstration :

On construit à l'aide de la Proposition 5.21 une variété réglée dont le lieu réel possède $t + k$ composantes connexes orientables. En effectuant des transformations élémentaires réelles ou bien complexes conjuguées, on en déduit l'existence de structures réelles de tout type topologique et tout degré satisfaisant $d = k \pmod{2}$. \square

Appendice C. Questions et tour d'horizon

C.1 Quelques questions qui ressortent de ces travaux

On collecte dans ce paragraphe plusieurs questions qui ressortent des travaux présentés dans ce mémoire.

1) Existe-t-il des invariants énumératifs analogues à ceux présentés en genre quelconque, en dimension quelconque et avec des conditions d'incidence quelconques ?

2) Les bornes inférieures fournies par ces invariants sont-elles optimales en général ? La question se pose déjà dans le cas du plan projectif ou de l'espace projectif de dimension trois.

3) Les bornes supérieures fournies par l'invariant de Gromov-Witten sont-elles optimales ?

4) Quelle est l'asymptotique de l'invariant χ_r^d , $r \leq 1$, calculé dans le §2.4 ? Nos formules calculent l'invariant en fonction d'une somme sur des arbres décorés. Quels sont les arbres qui sont asymptotiquement dominants/négligeables ?

5) Dans le cas du plan projectif par exemple, lorsque $r = 3d - 1$, notre formule calcule l'invariant comme une somme sur des arbres dont certains contribuent positivement et d'autres négativement. Ceci garantit l'existence de structures presque-complexes pour lesquelles davantage de courbes rationnelles réelles satisfont nos conditions d'incidences que le nombre imposé par l'invariant χ_{3d-1}^d . Combien de courbes réelles a-t-on ainsi construit ?

6) La méthode de calcul suivie dans la première section s'applique à toute variété symplectique de dimension quatre et calcule l'invariant χ en fonction d'invariants de Gromov-Witten de surfaces rationnelles relatifs à des courbes de carré -2 ou -4 lorsque L est une sphère ou un plan projectif réel. Que sait-on de ces invariants et qu'en déduire pour l'invariant χ ?

7) Dans quelles situations exactement peut-on calculer l'invariant χ_r^d en fonction d'invariants relatifs imaginaires ?

8) Étudier l'invariant de la quadrique ellipsoïde en travaillant uniquement avec des fractions rationnelles, voir la Remarque 2.18.

9) Comment calculer l'invariant F des fibrés cotangents à la sphère, au tore et à l'espace projectif réel donné par le Théorème 3.6 ?

10) Développer le lien entre la notion d'état spinoriel introduite dans le §4.1 et l'orientation des espaces de modules de courbes réelles de type topologique quelconque.

11) Construire grâce au Théorème 5.1 l'homologie de Floer de sphères lagrangiennes dans une variété symplectique dont la première classe de Chern s'annule.

12) S'affranchir de la notion de simplicité des involutions antibirationnelles.

13) Résoudre le Problème 5.17 ?

14) Existe-t-il des sous-espaces naturels de $H_2(X; \mathbb{C})$ dont la trace dans $H_2(X; \mathbb{Z})$ coïncide avec $A_\omega(X)$ et $B_\omega(X)$?

15) Le fibré unitaire cotangent d'une surface orientable hyperbolique peut-il se plonger dans une variété de dimension quatre difféomorphe à une surface rationnelle ou réglée ?

16) Classifier les surfaces réglées réelles minimales sur \mathbb{C} mais non sur \mathbb{R} .

C.2 Tour d'horizon de travaux ayant un rapport avec ce mémoire

Un algorithme permettant, dans le cas des surfaces toriques réelles, le calcul de l'invariant obtenu dans le Théorème 2.1 a été proposé par G. Mikhalkin [24] lorsque le nombre de points choisis réels est maximal. Cet algorithme a été plus tard étendu par E. Shustin [29] pour un choix quelconque de points réels. Cet algorithme a été utilisé par I. Itenberg, V. Kharlamov et E. Shustin [19] pour estimer cet invariant, fournissant notamment l'estimation

$\chi_{3d-1}^d \geq \frac{1}{2}d!$ dans le cas du plan projectif, le calcul en degré inférieur ou égal à cinq, puis l'asymptotique $\log |\chi_{c_1(X)d-1}^d| \cong \log N_d$ dans le cas des surfaces de Del Pezzo réelles X , voir [20]. Ces derniers ont également plus récemment obtenu une formule de type Caporaso-Harris tropicale [21] pour le calcul de χ_{3d-1}^d dans le plan, après que A. Gathmann et H. Markwig [13] ont obtenus cette formule pour le calcul tropical de N_d . E. Shustin [30] a adapté ces méthodes tropicales pour obtenir des résultats analogues dans le cas de la quadrique ellipsoïde. La valeur $\chi_{10}^5(\mathbb{C}P^3) = 45$ a été annoncée par G. Mikhalkin et une formule calculant $\chi_{2d}^d(\mathbb{C}P^3)$ pour tout degré d est depuis annoncée par ce dernier en collaboration avec E. Brugallé. I. Itenberg, V. Kharlamov et E. Shustin ont obtenus des invariants relatifs tropicaux dans un contexte analogue à celui présenté dans le Théorème 3.1. Le fait qu'il existe une configuration de cinq coniques réelles pour lesquelles les 3264 coniques tangentes à ces cinq coniques sont toutes réelles a été établi par F. Ronga, A. Tognoli et T. Vust [27]. Les invariants que j'ai présenté dans les Théorèmes 2.1 et 4.1 ont été interprétés par C.-H. Cho [7] et J. Solomon [31] en utilisant le langage introduit par K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta et K. Ono [12]. J. Solomon a étendu ces invariants aux courbes de genre strictement positifs mais de structure conforme fixée et aux variétés symplectiques de dimension six, notamment de Calabi-Yau. Dans le cas des quintiques de $\mathbb{C}P^4$, l'invariant a été calculé par R. Pandharipande, J. Solomon et Walcher [25]. Des invariants énumératifs portant sur des disques à bords dans le tore de Clifford ont été obtenus par P. Biran et O. Cornea [2]. Les disques holomorphes à bords dans le tores de Clifford ont été étudiés par C.-H. Cho dans sa thèse en termes de produits de Blaschke. De l'inégalité d'adjonction découle l'annulation de l'indice d'intersection entre un tore lagrangien et une classe basique de Seiberg-Witten. N. Puignau [26] a déterminé dans sa thèse les valeurs de $\epsilon(D)$ apparues dans la Proposition 4.3 dans le cas du plan projectif ou de la quadrique hyperboloïde. Les classes de déformations des surfaces rationnelles réelles [10], de $K3$ ou d'Enriques minimales [9] ont été obtenues par A. Degtyarev, I. Itenberg et V. Kharlamov, tandis que le cas des surfaces hyperelliptiques a été traité par F. Catanese et P. Frediani [6].

Appendice D. Liste des travaux

Les travaux [35], [36] et [37] correspondent à mon travail de thèse [34] et n'ont pas été discutés dans ce mémoire, au contraire de tous mes autres travaux. Il s'agit des articles [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44],[45], [46], [47], [48].

Références

- [1] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] P. Biran and O. Cornea. Quantum Structures for Lagrangian Submanifolds. *Prépublication math.SG/0708.4221*, 2007.
- [3] F. Bourgeois. A Morse-Bott approach to Contact Homology. *Ph.D dissertation, Stanford University*, 2002.
- [4] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geom. Topol.*, 7 :799–888 (electronic), 2003.

- [5] E. Brieskorn. Über holomorphe P_n -Bündel über P_1 . *Math. Ann.*, 157 :343–357, 1965.
- [6] F. Catanese and P. Frediani. Real hyperelliptic surfaces and the orbifold fundamental group. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(2) :163–233, 2003.
- [7] C.-H. Cho. Counting real J -holomorphic disks and spheres in dimension four and six. *Prépublication math.SG/0604501*, 2006.
- [8] A. Comessatti. Sulla connessione delle superficie algebriche reali. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 5(1) :299–317, 1928.
- [9] A. Degtyarev, I. Itenberg, and V. Kharlamov. *Real Enriques surfaces*, volume 1746 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [10] A. Degtyarev and V. Kharlamov. Real rational surfaces are quasi-simple. *J. Reine Angew. Math.*, 551 :87–99, 2002.
- [11] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. Introduction to symplectic field theory. *Geom. Funct. Anal.*, (Special Volume, Part II) :560–673, 2000. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [12] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. *Lagrangian Intersection Floer Theory - Anomaly and Obstruction*. 2000.
- [13] A. Gathmann and H. Markwig. The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry. *Prépublication math.AG/0504392*, 2005.
- [14] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [15] A. Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.*, 79 :121–138, 1957.
- [16] V. Guillemin and S. Sternberg. Birational equivalence in the symplectic category. *Invent. Math.*, 97(3) :485–522, 1989.
- [17] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. I. Asymptotics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(3) :337–379, 1996.
- [18] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. III. Fredholm theory. In *Topics in nonlinear analysis*, volume 35 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 381–475. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [19] I. Itenberg, V. Kharlamov, and E. Shustin. Welschinger invariant and enumeration of real rational curves. *Int. Math. Res. Not.*, (49) :2639–2653, 2003.
- [20] I. V. Itenberg, V. M. Kharlamov, and E. I. Shustin. Logarithmic equivalence of the Welschinger and the Gromov-Witten invariants. *Uspekhi Mat. Nauk*, 59(6(360)) :85–110, 2004.
- [21] I. V. Itenberg, V. M. Kharlamov, and E. I. Shustin. A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces. *Prépublication math.AG/0608549*, 2006.
- [22] D. McDuff. The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :679–712, 1990.
- [23] D. McDuff. Blow ups and symplectic embeddings in dimension 4. *Topology*, 30(3) :409–421, 1991.

- [24] G. Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 . *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2) :313–377 (electronic), 2005.
- [25] R. Pandharipande, J. Solomon, and J. Walcher. Disk enumeration on the quintic 3-fold. *Prépublication math.SG/0610901*, 2006.
- [26] N. Puignau. Première classe de Stiefel-Whitney de l’espace des applications stables réelles en genre zéro. *Thèse de l’université Paul Sabatier Toulouse III*, 2007.
- [27] F. Ronga, A. Tognoli, and T. Vust. The number of conics tangent to five given conics : the real case. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 10(2) :391–421, 1997.
- [28] A. Schmitt. Deformations of ruled manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 459 :213–218, 1995.
- [29] E. Shustin. A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric del Pezzo surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 15(2) :285–322, 2006.
- [30] E. Shustin. Welschinger invariants of toric del pezzo surfaces with non-standard real structures. *Prépublication math.AG/0605697*, 2006.
- [31] J. P. Solomon. Intersection theory on the moduli space of holomorphic curves with Lagrangian boundary conditions. *Prépublication math.SG/0606429*, 2006.
- [32] C. H. Taubes. *Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds*, volume 2 of *First International Press Lecture Series*. International Press, Somerville, MA, 2000. Edited by Richard Wentworth.
- [33] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6 :329–346 (1971), 1971.
- [34] J.-Y. Welschinger. *Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées*. Prépublication de l’Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research], 2000/43. Université Louis Pasteur Département de Mathématique Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 2000. Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2000.
- [35] J.-Y. Welschinger. J -courbes réelles à nids profonds sur les surfaces réglées. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 267(Geom. i Topol. 5) :88–118, 327, 2000.
- [36] J.-Y. Welschinger. Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 85(2) :367–392, 2002.
- [37] J.-Y. Welschinger. Forme d’intersection tordue et extension de la congruence d’Arnol’d. *Math. Z.*, 242(3) :589–614, 2002.
- [38] J.-Y. Welschinger. Invariants of real rational symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(4) :341–344, 2003.
- [39] J.-Y. Welschinger. Real structures on minimal ruled surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 78(2) :418–446, 2003.
- [40] J.-Y. Welschinger. Deformation classes of real ruled manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 574 :103–120, 2004.
- [41] J.-Y. Welschinger. Enumerative invariants of strongly semipositive real symplectic six-manifolds. *Prépublication math.AG/0509121*, 2005.
- [42] J.-Y. Welschinger. Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *Invent. Math.*, 162(1) :195–234, 2005.

- [43] J.-Y. Welschinger. Spinor states of real rational curves in real algebraic convex 3-manifolds and enumerative invariants. *Duke Math. J.*, 127(1) :89–121, 2005.
- [44] J.-Y. Welschinger. Invariants of real symplectic four-manifolds out of reducible and cuspidal curves. *Bull. Soc. Math. France*, 134(2) :287–325, 2006.
- [45] J.-Y. Welschinger. Towards relative invariants of real symplectic four-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 16(5) :1157–1182, 2006.
- [46] J.-Y. Welschinger. Effective classes and Lagrangian tori in symplectic four-manifolds. *J. Symp. Geom.*, 5(1) :9–18, 2007.
- [47] J.-Y. Welschinger. Invariant count of holomorphic disks in the cotangent bundles of the two-sphere and real projective plane. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(5) :313–316, 2007.
- [48] J.-Y. Welschinger. Optimalité, congruences et calculs d’invariants des variétés symplectiques réelles de dimension quatre. *Prépublication math.SG/0707.4317*, 2007.

$$B_0^5 = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+f \\ | \\ 1 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\} = B_2^5$$

$$B_1^6 = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } f \quad \bullet \text{ } e+f \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+2f \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\} = B_3^6$$

$$B_0^7 = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+2f \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+3f \\ | \\ 1 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet \end{array} \right\}$$

$$B_2^7 = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } f \quad \bullet \text{ } f \quad \bullet \text{ } e+f \\ / \quad | \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } f \quad \bullet \text{ } e+2f \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+3f \\ | \\ 3 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+2f \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+3f \\ | \\ 1 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet \end{array} \right\}$$

$$B_1^8 = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+2f \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } f \quad \bullet \text{ } e+3f \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+3f \quad \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \text{ } e+4f \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet \text{ } s_0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet \end{array} \right\}$$

FIG. 1 – Arbres projectifs décorés

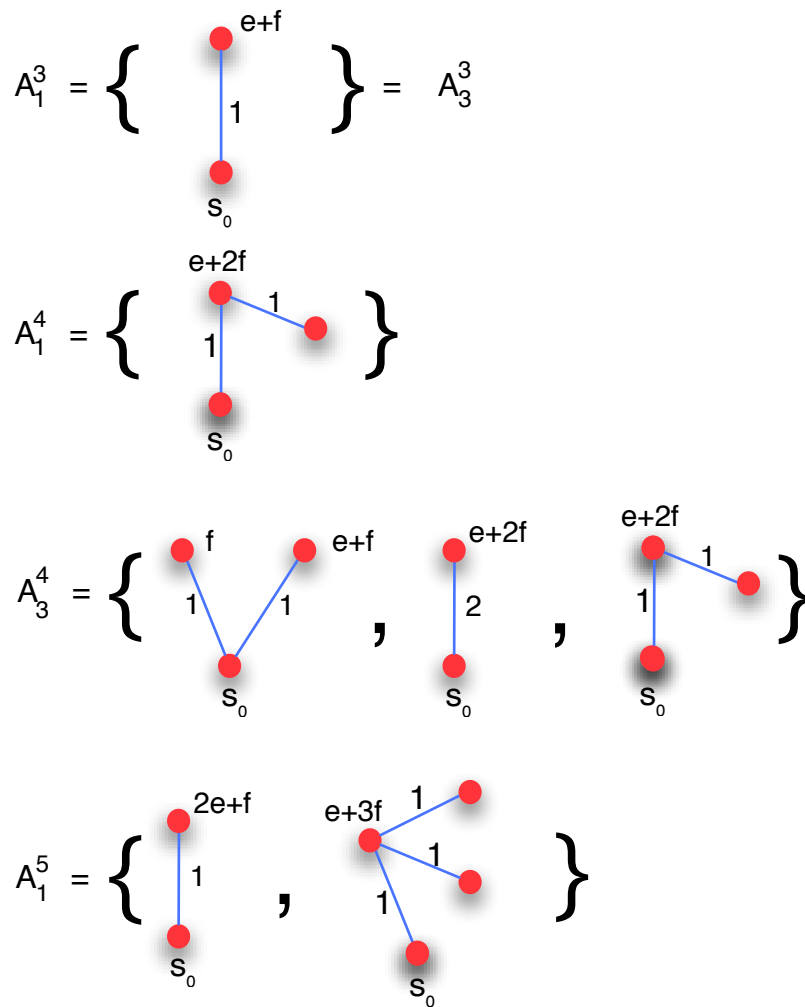


FIG. 2 – Arbres deux-sphériques décorés